TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 122 - Julho - 1941

União Eléctrica Portuguesa

S. A. R. L.

Rua Duque de Loulé, 240

PORTO

Telef. 2 830 P. B. X. e 90 Est.

CAPITAL { Acções . . . **40.000 contos**
Obrigações . . . **25 000 contos**

ELECTRICIDADE DO LINDOSO

FORÇA { instalada { hidráulica . **40.000** CV
térmica (reserva) **22.000** CV
já contratada . . . . . **30.000** CV
disponível . . . . . **10.000** CV

A **União Eléctrica Portuguesa** distribui e vende electricidade nos **distritos** de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU e de LEIRIA, pela mais extensa rêde de alta tensão em Portugal (mais de 1.000 kms), levando fôrça motriz às FÁBRICAS e luz a CIDADES, VILAS, ALDEIAS e LOGARES

A **U. E. P.** facilita a electrificação de Fábricas e oferece as maiores vantagens nas suas tarifas

Consultar a U. E. P. e consumir a energia do Lindoso é proveitoso negócio

C I M E N T O

SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.
Sacos de papel ou de juta com 50 Kg.
Barricas de 180 Kg.

S E C I L

COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO
RUA DO COMERCIO, 56, 3.º
LISBOA

CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA

A instalação mais moderna do País. Dois fornos rotativos em laboração. — O "CIMENTO TEJO" marca pelas suas altas resistências e regularidade, garantidas pela fiscalização contínua de tôdas as fases do fabrico, exercida por técnicos portugueses especializados.

Pedidos à Companhia "CIMENTO TEJO"

SEDE EM LISBOA
RUA DA VITÓRIA, 88, 2.º

FILIAL NO NORTE
AV. DOS ALIADOS, 20, 3.º
PORTO

NÚMERO
122
Julho — 1941

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N. / TEL. 49144 (linha 50)

DIRECTOR
CARLOS KRUS ABECASIS
ADMINISTRADOR
NUNO ABRANTES
BIBLIOTECÁRIO
LUIS DE ALMEIDA ALVES
CORPO REDACTORIAL
Vasco Mendes de Sousa
José Faria da Fonseca Santos
Militão Rosa Pereira
Silvério da Silva

NÚMERO AVULSO 5$00
ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	12$00	23$00	44$00
Colónias Portuguesas e Espanha...	—	30$00	55$00
Estrangeiro...	—	40$00	70$00

EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ALUNOS DO I. S. T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NAS
OFICINAS FERNANDES
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

Capa — Aspecto geral da cidade e baía de S. Paulo de Luanda.

		Págs.
As obras do Pôrto de Luanda . .	Eng. A. de M. Cid Perestrelo	455
A fotoelasticidade no ensino e na técnica	Eng. Civil Manuel Mendes da Rocha	465
O cálculo do betão armado aplicado aos edifícios	Eng. Civil J. de Cang . . .	495

Cimento «Liz» hidrofugado «N»

PRÓPRIO PARA

IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS

REBOCOS, FUNDAÇÕES, PAREDES, ETC.

Substitue com vantagem de ordem técnica e económica todos os impermeabilizadores conhecidos.

Em sacos de papel de 50 quilos

Peçam instruções para o seu emprêgo

Sede: Rua do Cais de Santarém, 64, 1.º — LISBOA
Filial: Rua de Santo António, 190-A, 1.º — PORTO

Agentes em todo o País

"LUSALITE"

fibro-cimento nacional

EM

INCOMBUSTÍVEL
LEVE
RESISTENTE
ISOLADOR
IMPUTRESCÍVEL

Tubos para pressões hidráulicas de 3 a 12 K.os/cm.2
Chapas onduladas para coberturas
Chapas lisas para revestimento de tetos, tabiques, etc.
Produtos da Sociedade Portuguesa de Fibro-cimento

ÚNICOS CONCESSIONÁRIOS:

CORPORAÇÃO MERCANTIL PORTUGUESA, L.da

Rua de S. Nicolau, 123

Telefones: 2 2091 — 2 2092 — 2 2093 — **LISBOA** — Telegramas: Lusalite

PUBLICAÇÕES DA TÉCNICA

Normas e Regulamentos para Instalações Eléctricas

Viga de Comprimento finito assente sôbre terreno elástico
Prof. G. MAGNEL

Ábacos para o Cálculo de Betão Armado
Eng. VASCO COSTA

Regulamento do Betão Armado
(1929)

A' venda na redacção da TECNICA

EMULSÕES
de asfalto para estradas

Todos os tipos e percentagens

TELEFONE 2 0879
Telegramas: Epalda—LISBOA

FÁBRICA EM SACAVÉM

A

Standard Electrica

TEM PARA ENTREGA IMEDIATA

ANALISADORES INDUSTRIAIS E DE RÁDIO—VOLTÍMETROS E AMPERÍMETROS PARA QUADROS
INSTRUMENTOS PADRÃO PARA LABORATÓRIOS—PINÇAS AMPEREMÉTRICAS
VERIFICADORES DE VÁLVULAS—OSCILADORES

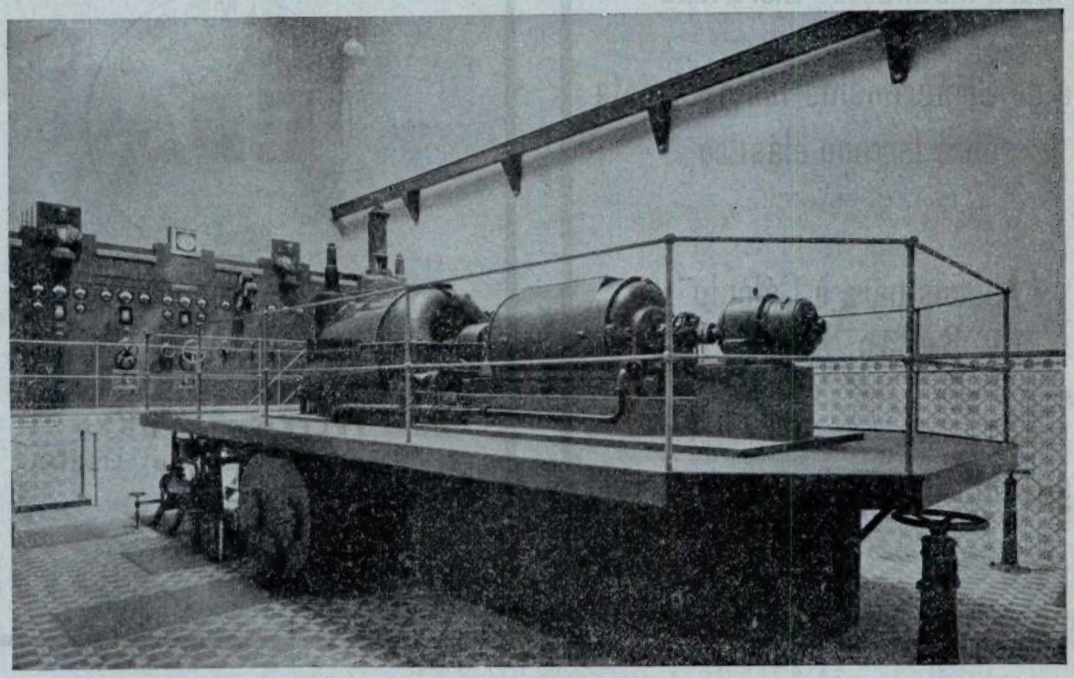
WESTON

MEGGERS PARA PROVA DE ISOLAMENTOS, PONTES WHEATSTONE
preparadas para a prova de linhas e cabos.
OSCILÓGRAFOS DE RAIOS CATÓDICOS,
GRUPOS ELECTROGÉNIOS, RESISTÊNCIAS,
CONDENSADORES, SOLDA RESINOSA, ETC.

das principais marcas

Telefones: P. B. X. 2 3111, 2 3112 e 2 3113 — Rua Augusta, 27 — LISBOA

OERLIKON



Turbo-alternader de 1000 kW tipo «Monosol» com tomada de vapor para aquecimentos, instalado na fábrica da Companhia Fiação de Crestuma, em Levêr

PRODUTOS OERLIKON

Equipamentos eléctricos para centrais termo e hidro-eléctricas, subestações e instalações de distribuïção. Geradores e motores eléctricos de todos os tipos, transformadores, reguladores de indução, grupos convertidores, mutadores, turbinas a vapor e turbo geradores, gruas eléctricas, interruptores e aparelhos de manobra para alta e baixa tensão, aparelhos de protecção e relais de todos os tipos, equipamentos para soldadura eléctrica por arco, compressores e bombas de vácuo, electrolisadores, equipamentos eléctricos para locomotivas, automotoras eléctricas e diesel-eléctricas (via estreita e normal), tramwais, troley-buses, funiculares, teleféricos, etc.

Representante Geral para Portugal e Colónias

P. BELLASI

Pôrto // Rua Sá da Bandeira, 494, 3.º // Telefone 968

ATELIERS DE CONSTRUCTION OERLIKON
ZURICH-OERLIKON (SUIÇA)

45 816

Previnem-se os nossos assinantes e anunciantes que a Revista suspende, como de costume, a sua publicação durante os meses de férias.

TÉCNICA

CARLOS KRUS ABECASIS

DIRECTOR

ANO XVI - N.º 122 JULHO 1941

AS OBRAS DO PÔRTO DE LUANDA

PELO ENG.º A. DE M. CID PERESTRELO

Professor da Cadeira de Portos do Instituto Superior Técnico

Chefe da Missão de Estudos do Pôrto de Luanda

O decreto-lei n.º 28:924 de 16 de Agôsto de 1938, que criou na Colónia de Angola um «Fundo de Fomento» destinado a custear as despesas necessárias ao estudo, projecto e execução das obras de fomento a realizar na Colónia, no prosseguimento duma vasta obra de valorização do nosso património colonial, levada a efeito pelo actual titular da pasta das Colónias, Dr. Vieira Machado, incluíu, entre as primeiras obras a realizar por êsse «Fundo», o estudo, construção e apetrechamento do pôrto de Luanda.

Organizada em Fevereiro de 1939 uma Missão Técnica para proceder ao estudo das obras a executar nesse pôrto, foi em Maio de 1940 aprovado o projecto elaborado pela referida Missão, sendo seguidamente aberto concurso público para a execução, por empreitada, das obras que constituem a primeira fase da construção do pôrto.

Ao concurso, realizado em Outubro de 1940, apresentaram-se apenas dois concorrentes, as firmas Anglo-Dutch Engineering and Harbour Works, C°, Ltd., e Waldemar Jara d'Orey, Ltd.ª, em virtude das circunstâncias criadas pela guerra, sendo em Abril de 1941 adjudicada à primeira destas firmas, cuja proposta foi considerada mais vantajosa, a execução das obras, cujo início terá lugar muito em breve, e que deverão estar concluídas quarenta e quatro meses depois de iniciadas.

Com a realização destas obras, orçadas em cêrca de 48 milhões de escudos, o pôrto de Luanda, que, pelas suas condições naturais, tráfego e ligações com o «hinterland», pode ser considerado como um dos melhores das nossas possessões ultramarinas, ficará sendo um dos mais bem dotados e apetrechados do continente africano.

I — Situação, condições naturais, história e obras anteriormente projectadas para o pôrto de Luanda.

O pôrto de Luanda, está situado numa vasta e extensa baía, com cêrca de quatro quilómetros de comprimento por dois de largura, compreendida entre os paralelos 8° e 46′ e 8° e 48′ S e os meridianos 13° e 14′ e 13° e 17′ E, abrigada dos ventos e temporais dos quadrantes NW e a SW pela restinga de areia, que forma a Ilha de Nossa Senhora do Cabo ou de Luanda, hoje ligada ao Continente por um atêrro recente, e dos quadrantes N a NE pela ponta do Dande, que se encontra a menos de 40 km de distância. Os seus fundeadouros estendem-se por uma área de mais de 800 hectares, ou seja quási

o dôbro da área abrigada do pôrto do Lobito, que constitue igualmente um outro excelente pôrto natural da costa de Angola.

Limitado do lado NE a SW por uma costa rochosa, que se estende desde o môrro das Lagostas até ao môrro onde se encontra a Fortaleza de S. Miguel, os grandes fundos da baía, que do lado da Ilha se aproximam de terra, encontram-se, do lado do poente, limitados por uma plataforma submarina, cujas cotas de fundo não excedem $2^m,5$ e que cai ràpidamente, até atingir a curva dos $20^m,0$ numa linha definida pelas instalações do Departamento Marítimo, na Ilha, até à ponta denominada da «Mãi Isabel», no Continente, deixando nalguns pontos a descoberto, nos baixa-mares, extensos cabeços de areia.

Para nascente do môrro da Fortaleza de S. Miguel e até cêrca de 2 km para montante da Fortaleza do Penedo, estende-se a parte baixa da cidade, que se prolonga depois para sul, pelas encostas e planaltos que lhe dão o seu pitoresco e as suas boas condições de salubridade.

que Paulo Dias de Novais fundou a cidade de S. Paulo de Luanda, estabelecendo ali pouco depois as fortalezas de S. Miguel e do Penedo, como pontos de apoio da nossa ocupação e baluartes da sua defesa marítima.

Ocupado pelos holandeses, de 1641 a 1648, foi desde então, outra vez nas mãos dos portugueses, um instrumento valioso para a ocupação e para o desenvolvimento da nossa maior e mais rica Colónia, estando a sua história ìntimamente ligada à história da Província de Angola.

Aberto ao comércio estrangeiro há quási um século, em 1844, foi sòmente cêrca de duas dezenas de anos mais tarde que Luanda foi dotada com as primeiras obras portuárias, graças à iniciativa do Governador Calheiros e Menezes, que mandou construir ali um pequeno cais, no local designado por «Portas do Mar». E só muito mais tarde, quando da construção do caminho de ferro de Luanda a Ambaca, em 1886, se pensou pela primeira vez em dotar o pôrto com as obras marítimas indispensá-

Fig. 1— O pôrto de Luanda no século XVII

O acesso ao pôrto faz-se nas melhores condições possíveis, por uma entrada larga de mais de 1 quilómetro, com fundos que vão até mais de $35^m,0$.

Conhecido dos portugueses desde os fins do século XV, por ocasião da segunda viagem de Diogo Cão, foi sòmente em 1575

veis para uma mais eficiente exploração dêsse caminho de ferro, o primeiro construído em África.

Vários planos de obras foram então esboçados, mas nenhum teve realização, e algumas dezenas de anos se passaram ainda antes que se iniciassem as primeiras obras

destinadas ao seu tráfego marítimo e que consistiam em simples pontes ou estacadas para o serviço privativo dos Caminhos de Ferro, da Alfândega, da Capitania e de diversas entidades particulares, que as exploravam.

local onde se encontram as instalações da Companhia Nacional de Navegação, onde seria construído um cais destinado a carvão e a minerais, até à ponte que ligava a Ilha ao Continente, e que se prolongaria, do lado da cidade, até um pouco a juzante das ins-

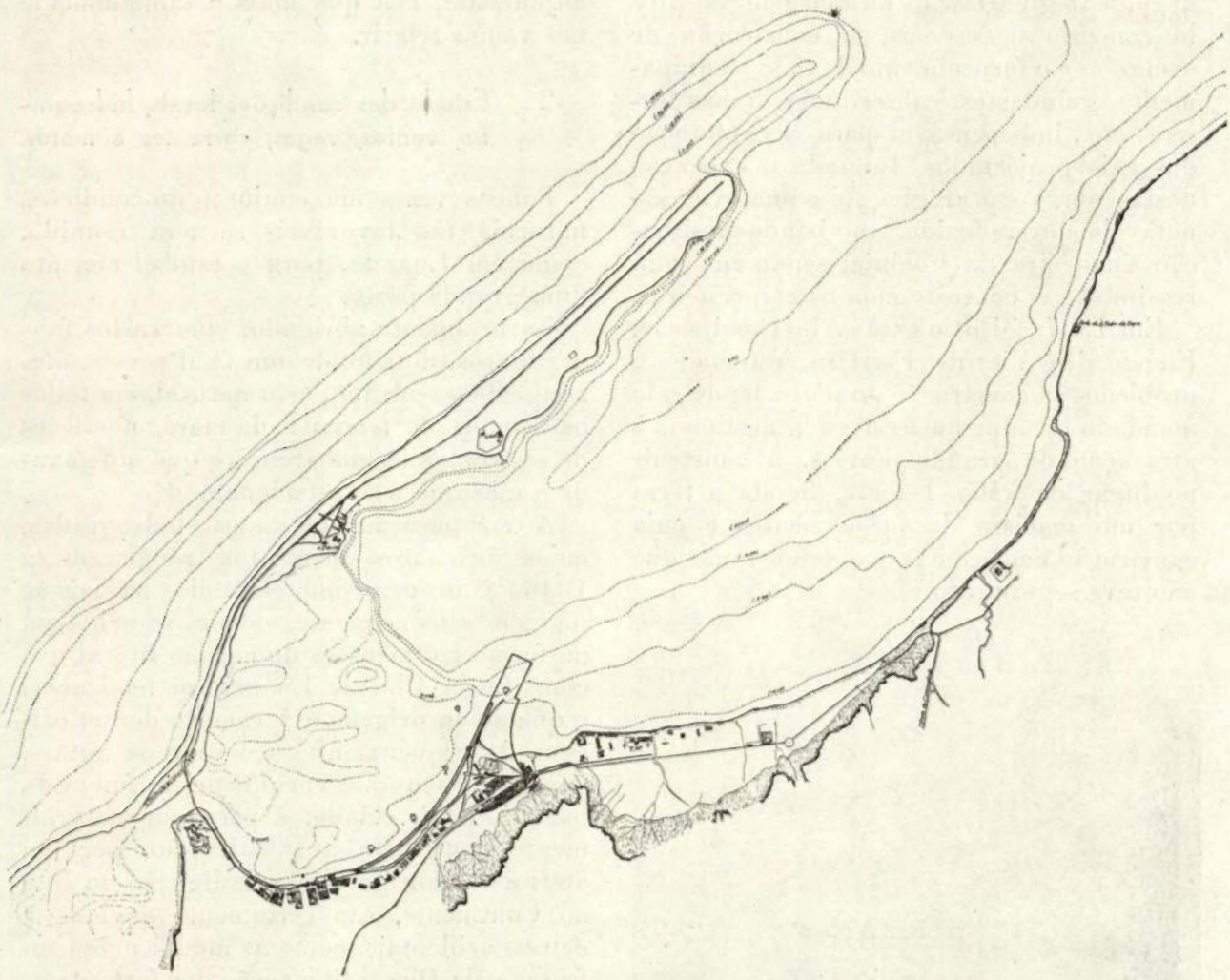


Fig. 2 — Plano hidrográfico do pôrto de Luanda, levantado em 1937 pela Missão hidrográfica da Colónia de Angola, com indicação das obras projectadas

Criado em 1910 um fundo especial destinado à construção do pôrto, iniciou-se em 1913 a construção dum pequeno trôço do muro cais, em frente da Alfândega, destinado a substituir a ponte ali existente, sendo em 1915 elaborado, pelo Engenheiro Lopes Galvão, Inspector de Obras Públicas da Colónia, um plano de obras de grande envergadura, compreendendo a regularização da margem, do lado da Ilha, desde o

talações dos caminhos de ferro, onde seria construído um cais para navios de grande calado com 1.800^{m},00 de comprimento, e ainda a dragagem de canais de acesso a estes cais, a construção de varadouros e de docas sêcas e outras obras complementares.

Em 1921, sendo Alto Comissário da República em Angola o General Norton de Matos, foram as obras do pôrto contratadas com a firma inglêsa Norton Griffits & C°,

Ltd., segundo um plano prèviamente acordado, e em que se incluíam, numa primeira fase de obras, a construção de um cais destinado a grandes navios, com 500^{m},00 de comprimento, na Ilha, a construção dum cais de cabotagem, numa extensão de pelo menos 1.000^{m},00, junto ao cais da Alfândega, a regularização da margem, no prolongamento dêsse cais, a construção de armazéns e o fornecimento de todo o equipamento, guindastes, cabrestantes, linhas férreas, etc., indispensável para a exploração dos cais projectados. Iniciada a execução destas obras em «régie» foi a sua extensão notàvelmente reduzida, em virtude da situação financeira da Colónia, sendo em 1925 rescindido o contrato com os empreiteiros.

Em 1927, foi pelo então Alto Comissário, Engenheiro Vicente Ferreira, retomado o problema da construção do pôrto, tendo sido mandada estudar uma estacada destinada à atracação de grandes navios, a construir no lugar da «Mãe Isabel», ligada a terra por um macisso de enrocamentos e cuja construção começou pouco depois, mas que não teve seguimento.

Fig. 3 — Aspecto da baía de Luanda, vendo-se à direita o local da «Mãi Isabel», onde será construído o pôrto

Outros projectos de obras foram depois apresentados para o pôrto, sendo em 1933 feita uma proposta para a sua construção, pela firma alemã Grünn & Bilfinger, adjudicatária dos trabalhos da construção do pôrto de Lobito e que não chegou a ser considerada por insuficiência de elementos de estudo e de informação, sendo finalmente, em 1939, em virtude da nova política do Fomento Colonial, criada uma Missão de Estudo, que dotada dos meios necessários, pôde efectuar os estudos indispensáveis para a elaboração do projecto de obras, agora adjudicado, e a que mais detalhadamente nos vamos referir.

2 — Estudo das condições locais, hidrografia, ventos, vagas, correntes e marés.

Poucas vezes um conjunto de condições naturais tão favoráveis se terá reünido, como em Luanda, para o estabelecimento dum grande pôrto.

Naturalmente abrigado, com vastos fundeadouros, dotado de um fácil acesso, oferece êste excelente pôrto natural, em todos os estados de tempo e de maré, condições de segurança às embarcações que o demandam e às que nêle estacionam.

A comparação das suas hidrografias, cujos primeiros elementos remontam a 1846 [1], mostra como os fundos na baía se mantêm sensìvelmente, embora se denotem, na forma e dimensões do cordão litoral que constitue a Ilha de Luanda, as tendências a que a sua origem e formação deram origem. As pequenas alterações que se notam, nos baixios que se encontram no fundo da baía, junto à cidade, e para que naturalmente contribuíu a substituïção, por um atêrro, da antiga ponte de ligação da Ilha ao Continente, são certamente devidas a causas acidentais, como as modificações sofridas pela Ilha, sob a acção dos fortes temporais, sendo particularmente de notar a conservação das profundidades obtidas por dragagens, como as que se fizeram para a execução do projecto do Eng.º Abela, em 1928.

Observações meteorológicas de algumas dezenas de anos mostram que no litoral de Angola os ventos, tanto reinantes como dominantes, sopram do quadrante do SW,

[1] Planta e perspectiva do Pôrto de Luanda, datada de 1846, publicada por José Joaquim Lopes de Lima, Capitão de Fragata da Armada Portuguesa.

sendo as principais baías que se abrem nesta costa, como a Baía dos Tigres, a de Pôrto Alexandre, a do Lobito e a de Luanda, orientadas do S. para o N. ou do SW. para o NE., não atingindo as máximas velocidades observadas para os ventos valores superiores a 50 km/hora.

Pelas suas condições naturais está a baía de Luanda magnìficamente abrigada da forte ondulação que por vezes se propaga ao longo da costa africana, conhecida pelo nome de «calema» e que nalguns pontos dificulta extraordinàriamente o tráfego marítimo.

As «calemas» que são movimentos ondulatórios de curto período, ainda imperfeitamente estudados, fazem-se sentir principalmente nos meses de Agôsto a Outubro, sendo a vaga que se nota na baía, e cuja altura máxima raramente atinge um metro, devida à reflexão da ondulação que percorre a costa em direcção quási paralela a esta, e que, contornando a ponta da restinga, vai incidir na margem, a juzante de Fortaleza do Penedo, donde se reflecte novamente, atingindo a Ilha pelas alturas da ponte da Companhia Nacional de Navegação, onde é ainda

Fig. 4 — Cais das «Portas do Mar»

mais uma vez reflectida, já então com muito fraca intensidade, sôbre a margem da cidade, na altura das «Portas do Mar».

Como se depreende pela comparação das hidrografias, e foi comprovado depois por estudos feitos tanto pela Missão Hidrográfica da Costa de Angola, como pela própria Missão de Estudo do Pôrto de Luanda, as concorrentes neste pôrto são extremamente fracas, não atingindo as correntes de marés velocidades superficiais superiores a 1 milha, na enchente, e a 1/2 milha, na vazante.

Ao longo da costa corre, como é sabido, a corrente de Benguela, dirigida do Sul para o Norte, e a cuja acção se deve, em grande parte, a formação das restingas que se encontram ao norte das fozes de alguns dos rios que ali desaguam, e que, dentro da praia de Luanda, deve contribuir para a manutenção das profundidades junto à Ilha.

As marés apresentam-se, como em geral nos portos da costa ocidental da África, com características de marés regulares, sendo as constantes da maré neste pôrto, determinadas pela Missão Hidrográfica, as seguintes:

Estabelecimento do porto — III h. 40 m.
Unidade de altura — 0,67 m.
Idade da maré — 17 h. 19 m.

A Missão Hidrográfica instalou, para os seus estudos em Luanda, um marégrafo registador, cujas curvas permitiram obter as constantes harmónicas destinadas ao cálculo das marés. Essas curvas, de que nos servimos para os estudos do pôrto, mostram a regularidade das marés, cuja amplitude máxima observada é de 1,90 m.

3 — Reconhecimento geológico do sub-solo e das pedreiras, saibreiras e burgaleiras destinadas ao fornecimento dos materiais para as obras.

Escolhido num estudo prévio, apresentado em Junho de 1939, o local mais conveniente para o estabelecimento do pôrto comercial, que devia ficar junto às instalações do caminho de ferro, com o qual os serviços marítimos têm íntima ligação, fêz-se, sob a direcção do Eng.º Henrique O'Donnell, o estudo geológico do sub-solo, para o que se executaram trinta e três sondagens, das quais trinta na zona das futuras obras e as três restantes em pontos especiais, com o fim de reconhecer aproximadamente a natureza do sub-solo em tôda a largura da baía.

Os trabalhos de reconhecimento foram feitos por meio de duas sondas de percussão, montadas em batelões, sendo colhidas 358 amostras e perfurados um total de 433,0 metros.

O exame detalhado das amostras colhidas e as observações feitas durante a execução das sondagens permitiram considerar cinco formações distintas, assim constituídas:

I — Areias superiores
II — Areias finas intermédias
III — Areias finas lodosas
IV — Complexo argilo-arenoso
V — Areias finas inferiores

A cota mais baixa atingida em todo o trabalho foi de ($-32^m,25$), não tendo sido no entanto atingido o substratum terciário, sendo, tôdas as formações assinaladas, constituídas por aluviões relativamente recentes.

Na zona abrangida pelas obras projectadas, o fundo da baía é formado por uma série arenosa (I) de composição e espessura muito variável, tanto no sentido horizontal, como em profundidade. Pela sua natureza e posição é esta formação a que mais interessa para o estudo e construção das obras projectadas. A espessura da formação é muito irregular, atingindo, no máximo, cêrca de $14^m,00$, não sendo a espessura média superior a $5^m,00$. Esta série é formada por areias siliciosas, contendo freqüentemente saibro, burgao e conchas de moluscos, e, por vezes, na sua parte superior, partículas lodosas, sendo a composição granulométrica das areiras bastante irregular.

Na segunda formação considerada (II) e cuja espessura é igualmente muito irregular, encontram-se areias finas, pràticamente isentas de lôdo, juntamente com saibro, burgao e fragmentos de conchas, contendo nalguns casos uma leve percentagem de argila.

À cota média de ($-22^m,00$) encontra-se intercalada entre a série de areias finas (II) e o completo argilo-arenoso subjacente (IV), uma formação lodosa (III), de composição e espessura muito irregular, cuja espessura atinge, na testa do «Travessão» projectado, cêrca de $1^m,50$.

Depois, abaixo da cota de ($-23^m,00$), encontra-se uma importante formação altamente argilosa (IV), de composição e estrutura muito irregular, e cuja espessura máxima assinalada foi de $6^m,00$ no local correspondente ao extremo Este do «Travessão», formada por bolsadas ou camadas de areias finas e macias, intercaladas no complexo argilo-arenoso que constitue a formação. Finalmente abaixo dêste complexo argiloso, encontra-se uma zona de transição de areias argilosas, muito finas (V), havendo pontos porém em que a passagem da formação argilosa para a arenosa se faz bruscamente.

Em cada uma das formações cuja espessura é, como dissemos, variável, foram estudadas e ensaiadas as amostras colhidas, o que permitiu determinar aproximadamente o atrito interno e a resistência específica à compressão vertical das areias que constituem essas formações, às várias profundidades.

Como complemento do seu interessantíssimo estudo, fêz o Eng.º O'Donnell um reconhecimento das pedreiras, saibreiras e burgaleiras que se encontram tanto na zona do pôrto, como nas suas proximidades, de modo a colhêr elementos de informação para a obtenção dos materiais, pedra, areia e burgao, destinados às obras, e que permitiram fixar no «caderno de encargos» as suas características, sendo depois feitos ensaios dêsses materiais em laboratórios oficiais, e cujos resultados confirmaram as previsões feitas.

4 — Obras projectadas pela Missão de Estudo e alterações posteriormente introduzidas.

As obras projectadas pela Missão de Estudo compreendem essencialmente a construção dum «Travessão» ou «Pier» acostável, com 300,0 metros de comprimento e 160,0 metros de largura, e a regularização da margem em frente da cidade, na parte compreendida entre o actual cais de cabotagem junto à Alfândega e o «Travessão» projectado, e que será limitado do lado do poente, por um trôço de muro-cais, com

Fig. 5 — Perspectiva do «Travessão» projectado

100,0 metros de comprimento destinado ao serviço de cabotagem, e do lado do nascente, onde se projectam as futuras extensões do pôrto, por uma regularização provisória, constituída por simples enrocamentos arrumados.

Os muros-cais do «Travessão» e do cais anexo, serão fundados sôbre macissos de enrocamento com uma espessura mínima de $1^m,50$, à cota de ($-10^m,50$) os muro-cais laterais de «Travessão», e de ($-11^m,50$) o muro cais de tôpo, sendo o muro-cais destinado aos navios de cabotagem fundado à cota de ($-5^m,50$).

Na escolha dos tipos de obras a adoptar para os muros-cais, tendo-se em conta as condições locais, a natureza dos fundos e a economia das obras, preferiram-se as fundações contínuas e o emprêgo do betão ou do betão armado, sendo os tipos estudados fundados sôbre caixões de betão armado, mas deixando-se aos empreiteiros a possibilidade de apresentarem outros tipos de

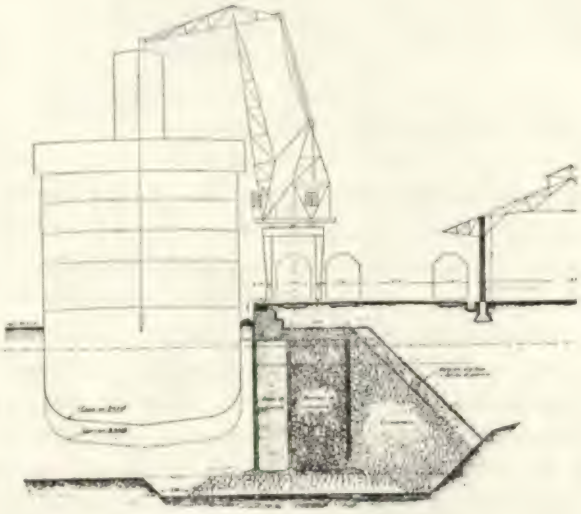


Fig. 6 — Corte transversal do muro-cais projectado pela Missão de Estudo

obras, em harmonia com as suas possibilidades em material de equipamento.

O tipo estudado para o projecto do concurso e representado no corte transversal junto, era constituído, nos cais fundados a grandes profundidades, por caixões de betão armado com 20,0 metros de comprimento por 8,0 metros de largura e 11,0 metros de altura, cheios parte com betão magro, parte com pedra e areia, com uma superstrutura em betão simples, e que seriam construídos em plano inclinado feito na margem e lançados, com cêrca de 7,0 metros de altura, sendo depois acabados a flutuar e colocados por afundamento.

Nos cais fundados a (— 5^m,50) os caixões tinham apenas 4^m,50 de largura e 6,0 metros de altura.

O empreiteiro, pensando no aproveitamento do material que já possuía, propôs a

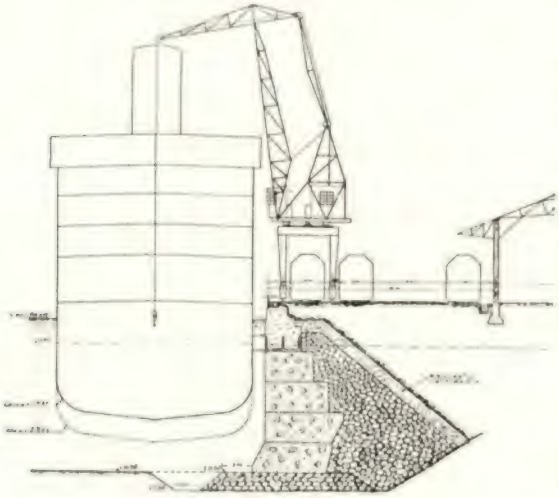


Fig. 7 — Corte transversal do muro-cais proposto pelos empreiteiros

substituïção dêsses caixões por blocos macissos de betão, com cêrca de 90 toneladas de pêso, num muro com o perfil indicado no corte transversal junto, e que foi aprovado.

Os blocos artificiais, feitos em estaleiro, serão colocados por meio dum batelão especial, munido duma cábrea, e com uma abertura no fundo, para a passagem dos blocos.

A superestrutura dos muros-cais será constituída, na sua parte inferior, fundada à cota de (— 0^m,50), por caixões ôcos de betão, com 10 toneladas de pêso, construídos, como os grandes blocos artificiais, em estaleiro e colocados por meio dum guindaste, que se deslocará sôbre os blocos já assentes, e cheios depois, no local, igualmente com betão.

A extensão total dos cais acostáveis será de 860^m,0, sendo 100^m,0 fundados a (— 5^m,50), 600^m,0 fundados a (— 10^m,50) e 160^m,0, fundados a (— 11^m.50) podendo permitir a atracação simultânea de seis navios.

A largura prevista para o «Travessão», de 160^m,0, permite dispor de dois cais, com 18^m,5 de largura cada um, de uma rua central, com 33^m,0 e de uma faixa, com 45^m,0 de largura, para cada cais, destinada a depósito e estacionamento das mercadorias e onde serão construídos os necessários armazéns.

Para a regularização da margem, desde o actual cais da Alfândega até ao cais de cabotagem projectado, numa extensão de aproximadamente 1.715,0 metros lineares, o tipo de obras previsto é o do revestimento dos taludes dos aterros por placas hexagonais de betão, assentes sôbre uma camada de enrocamentos, argila e detritos de pedreira e apoiados inferiormente numa cortina, formada por blocos de betão, repousando sôbre um macisso de enrocamentos, com as disposições indicadas no corte junto. A parte superior dos taludes, como a dos muro-cais será protegida por um capeamento em cantaria.

Os muros-cais e taludes serão providos de escadas de cantaria, cabeços e argolas de amarração, sendo as escadas em número

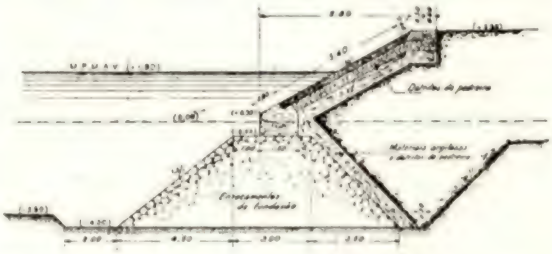


Fig. 8 — Corte transversal dos taludes de revestimento

de nove, os cabeços em número de cincoenta e nove e as argolas de amarração em número de trinta e cinco.

Os aterros, destinados a constituírem os terraplenos, tanto da margem como do

«Travessão», e cujo volume previsto é de cêrca de 1.500.000^{m3}, serão obtidos ou totalmente por dragagens ou parte por dragagens — indispensáveis para a obtenção das profundidades requeridas pela navegação — e parte pelos produtos do desmonte das encostas junto à estação dos caminhos de ferro, tendo os terraplenos a conquistar uma área de mais de 200.000 metros quadrados. Nesses terraplenos serão construídas canalizações de esgôto, no prolongamento das existentes na cidade e na parte a conquistar, com uma extensão total de cêrca de 6.500 metros lineares, de modo a constituir-se um sistema de esgotos destinado a assegurar não só a vazão dos colectores existentes, como também a dos que venham a ser construídos nos futuros arruamentos.

A parte destinada pròpriamente a pôrto comercial, e que será oportunamente dotada com pavimentos, armazéns, vias férreas, guindastes e outro material de equipamento, será constituída pelo «Travessão» e pela zona contígua, limitada pelo muro-cais de cabotagem e por um trôço do talude revestido, com 300 metros de comprimento, e que de futuro, poderá ser aproveitado com a construção de obras ligeiras para atracação de barcos de pequeno e médio calado, e será devidamente vedada, ficando com uma área de cêrca de 90.000 metros quadrados. O seu acesso, do lado da cidade far-se-á por uma avenida marginal, a construir junto ao talude projectado, e por uma rua de ligação, construída na parte que corresponde aproximadamente à linha de margem actual, ficando entre a avenida e a rua projectada, uma faixa, com 40 metros de largura, destina a construções.

O custo das obras projectadas, não incluindo os pavimentos, armazéns e equipamento é, como dissemos, de cêrca de quarenta e oito milhões de escudos.

5 — O futuro do pôrto de Luanda como pôrto comercial. Movimento actual e possibilidades de desenvolvimento.

Servido por uma das grandes linhas férreas da colónia, a linha que liga Luanda a Malange, com cêrca de 430 km de extensão, além dos ramais, de Catête, de Calumbo, de Zenza e da Canhoca, que prefazem uma extensão total de mais de 600 km, por várias vias fluviais importantes, como o Quanza, navegável numa extensão de mais de 200 km, e por alguns milhares de quilómetros de estradas, o «hinterland» do pôrto de Luanda estende-se por quási três centenas de milhares de quilómetros quadrados, através de vastas regiões agrícolas, cujo desenvolvimento depende, em parte, das facilidades que o pôrto possa oferecer à exportação dos seus produtos.

A exploração dos jazigos minerais, ainda imperfeitamente conhecidos, das províncias de Luanda e de Malange, o aproveitamento da energia hidráulica dos seus principais rios, e o conseqüente progresso industrial, podem também contribuir para o aumento do tráfego dêste pôrto, que dispondo de grandes tractos de terreno junto à margem, poderá servir para a criação de novas indústrias e para o desenvolvimento das existentes.

A sua função como pôrto militar e a sua importância política, como capital da Colónia, marcam-lhe ainda uma posição de destaque.

Pôrto de tráfego relativamente importante, o segundo da Colónia em movimento, depois do Lobito, tem já actualmente um movimento de navios, de passageiros e de mercadorias que justificam largamente a extensão das obras projectadas.

O seu tráfego de mercadorias, que há duas dezenas de anos não excedia 50.000 toneladas, das quais cêrca de 30.000 cabiam à importação e sòmente cêrca de 20.000 à exportação e à cabotagem, atingiu nos últimos anos mais de 100.000 toneladas, sendo o aumento principalmente devido à exportação e à cabotagem.

Segundo elementos fornecidos pela Repartição da Estatística de Luanda, as médias das quantidades e valores das mercadorias importadas e exportadas pelo pôrto de Luanda, no decénio de 1929-1938, foram as seguintes:

Mercadorias importadas:

Quantidades	41.614 toneladas
Valores....	73.525 angolares

Mercadorias exportadas:

Quantidades 34.236 toneladas
Valores.... 53.173 angolares

As principais mercadorias importadas pelo pôrto são: os combustíveis (carvão, gasolina e óleos), os materiais de construção (cimento e ferro), as bebidas (vinho e cerveja), os produtos alimentares (azeite e farinhas), os maquinismos, os tecidos e os artigos de vestuário, sendo as principais mercadorias exportadas: o açúcar, o algodão, o café, o coconote, o milho, o óleo de palma, os couros e o sisal.

O número total de navios, de longo curso e de cabotagem, que, no mesmo decénio entraram no pôrto de Luanda, foi de 3.459, com 9.048.437 toneladas, ou seja uma média anual de 345 navios com 904.843 toneladas, sendo 147 navios de longo curso com 866.138 toneladas, e 198 navios fazendo serviço de cabotagem, com 38.705 toneladas.

O número de passageiros embarcados e desembarcados no decénio de 1929-1938, foi de 97.696, sendo portanto a média anual dos passageiros embarcados e desembarcados de cêrca de 10.000.

Como pôrto de pesca também tem o pôrto de Luanda um movimento interessante sendo a quantidade de peixe vendida anualmente — e que não atingia há dez anos 1.000 toneladas, com um valor de cêrca de um milhão de angolares, — em 1938, último ano a que se referem as estatísticas publicadas, superior a 3.500 toneladas, com um valor de cêrca de quatro milhões de angolares.

No seu estudo a Missão Técnica previu, como lhe cumpria, o possível desenvolvimento do pôrto, não só num futuro próximo, mas quando as possibilidades e o aproveitamento integral das riquezas e da Colónia possam justificar novas obras, que se estenderão para o lado do nascente, constituindo outros «Travessões» e permitindo o aproveitamento dos terraplenos da margem que, desde a estação dos caminhos de ferro até aos morros da Fortaleza de S. Pedro da Barra, são já, em parte, utilizados para depósitos de combustíveis líquidos, fábricas e armazéns, e deverão constituir a zona industrial do pôrto. Também para o serviço, tanto da frota mercante como dos navios de guerra, se entreviu a possibilidade da construção de docas sêcas, com cais e terraplenos anexos, destinados a oficinas e estaleiros, sendo o local escolhido para a sua construção o espaço a juzante do «Travessão», entre a margem actual e a Fortaleza do Penedo, onde se deverá localizar também o futuro aero-pôrto marítimo da cidade.

Fig. 9 — A praia de Luanda, vendo-se ao fundo uma parte da cidade

Previu ainda a Missão de Estudo a regularização da margem para poente, desde as «Portas do Mar» até à Ilha, que constitue desde há muito a praia de Luanda e o melhor logradouro da cidade, e que é, pelas suas excelentes condições, um dos seus melhores e mais aprazíveis bairros, obra a fazer naturalmente pela Câmara Municipal, a quem especialmente interessa.

Velha aspiração da Colónia, incluída desde há meio século nos planos de fomento da maior parte dos seus Governadores e Altos Comissários, a realização das obras do pôrto de Luanda, agora levada a efeito, representará um novo padrão de colonização e de soberania que os portugueses terão colocado em Angola.

A FOTOELASTICIDADE NO ENSINO E NA TÉCNICA[1]

PELO ENG.º CIVIL (I. S. T.) MANUEL MENDES DA ROCHA

ASSISTENTE DO I. S. T.
BOLSEIRO DO I. A. C.

Honra-se a «Técnica» com o publicar hoje em suas páginas, devidamente modificada pelo Autor, a notável conferência proferida, a convite da já benemérita Secção Cultural da A. E. I. S. T., pelo Eng.º Mendes da Rocha.

Os numerosos engenheiros e alunos que tiveram a dita de a escutar, certamente a vão meditar de novo, na convicção de muito terem a lucrar com tal. Quanto aos que a não ouviram, ousamos pedir-lhes que a leiam e garantir-lhes que não terão de que se arrepender.

Alto serviço prestou à nossa Escola o sr. Eng.º Mendes da Rocha. Bem haja! Em grande parte graças à sua dedicação, começa a ser consoladora realidade o que há tanto é aspiração de todos os que servem — o nosso Laboratório de Elasticidade e Resistência de Materiais, *o qual aguarda, agora, a prova de interêsse, mais que devido e que decerto não faltará, dos alunos do I. S. T., e até dum modo geral, de todos os engenheiros portugueses.*

1 — No relatório dum trabalho que apresentei em 1938 ao Instituto para a Alta Cultura, dizia: «as numerosas dificuldades que me surgiram no curso de Engenharia Civil, levaram-me a concluir a insuficiência do cálculo, para a resolução de grande parte dos problemas postos pela técnica e a necessidade flagrante de recorrer a métodos experimentais para a obtenção de soluções satisfatórias».

A minha permanência nos Estados Unidos, como bolseiro dêsse Instituto, veio confirmar esta idea e dum modo geral fez-me sentir a necessidade que existe de destruir a nossa tendência apriorística, que tem sido alimentada pelo ensino livresco das ciências aplicadas, devendo reconhecer-se a experiência vivida como a melhor fonte de aquisição do conhecimento.

Devido à maneira como é feito o ensino neste Instituto, o aluno fica com uma idea falsa do modo como progride o conhecimento, não dando à experiência o valor essencial que ela tem no desenvolvimento da ciência, julgando que esta progride reflectindo sôbre a já muito desacreditada «essência íntima das coisas». Mesmo no ensino das ciências puras, os métodos usados dão uma falsa idea do seu valor e da maneira como elas evoluem.

2 — No ensino da engenharia um dos principais fins a alcançar é a formação de pessoas capazes do cálculo de máquinas e estruturas, isto é, capazes de utilizar os materiais de construção com economia e segurança.

---

(1) Conferência promovida pela Secção Cultural da A. E. I. S. T. e realizada no Instituto Superior Técnico em 11 de Junho de 1941.

Para se atingir êste fim há necessidade de conhecer a distribuïção das tensões desenvolvidas nos corpos sólidos, em repouso ou movimento, submetidos à acção de fôrças.

Vejamos como se ataca um problema de determinação de tensões elásticas.

Consideremos para concretizar o caso duma viga simplesmente apoiada submetida a uma fôrça F actuando normalmente ao eixo da viga e a meio do seu vão. Suponhamos que a espessura da viga é suficientemente pequena, de modo a podermos considerá-la em equilíbrio elástico plano.

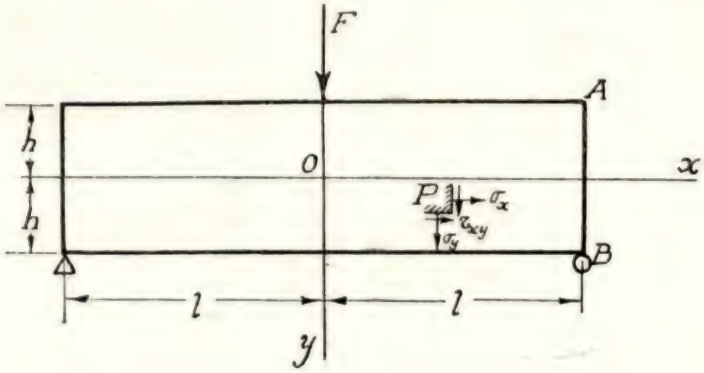


Fig. 1

Dum modo geral o que se pretende é determinar o estado de solicitação elástica num ponto qualquer P de coordenadas (x, y), isto é, conhecer as tensões normais σ_x e σ_y, e a tensão tangencial τ_{xy}.

Se desprezarmos as fôrças mássicas actuantes sôbre a viga, então σ_x, σ_y e τ_{xy} devem satisfazer ao seguinte sistema de equações às derivadas parciais:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0 \,, \end{cases}$$

fornecido pela teoria de elasticidade para um equilíbrio plano qualquer.

Há infinitas funções σ_x, σ_y, e τ_{xy} de x e y satisfazendo a estas equações. Façamos:

$$\begin{cases} \sigma_x = a\,y \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \,, \end{cases}$$

sendo $a \lesseqgtr 0$. É fácil de verificar que estas funções satisfazem ao sistema, mas vamos mostrar que estes não são os valores de σ_x, σ_y, e τ_{xy}, que satisfazem ao nosso problema. Efectivamente vejamos quais os valores de σ_x, σ_y, e τ_{xy} nos pontos da face A B da viga; para êstes pontos é $x = l$, e y variável de $-h$ a $+h$; portanto vem:

$$\begin{cases} \sigma_x = a\,y \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \,. \end{cases}$$

Mas nestes pontos da superfície da viga tem de ser $\sigma_x = 0$, pois nêles não actua nenhuma fôrça exterior. Então σ_x, σ_y, e τ_{xy} devem ser funções de x e y que àlém de satisfazerem ao sistema (1), satisfaçam também às chamadas condições aos limites, isto é, estas funções devem ser tais que na superfície da peça equilibrem as fôrças exteriores aplicadas.

Assim no caso considerado σ_y deve ser uma função de x e y tal que para $y = -h$ tome o valor zero para todos os valores de x desde $-l$ a $+l$ excepto na vizinhança de $x = 0$, onde σ_y deve equilibrar a fôrça F aplicada.

Há em regra impossibilidade de determinar funções que satisfaçam simultâneamente ao sistema (1) e às condições aos limites, isto é, a teoria da elasticidade é, em geral, impotente para resolver os problemas de determinação de tensões.

Para dar uma idea da complexidade dêstes problemas, apresento a solução obtida em 1927 por Seewald para o problema da viga submetida à fôrça F:

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y + \frac{F}{e\pi} \int_0^\infty \frac{(\lambda h . \operatorname{ch} \lambda h - \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y - \operatorname{sh} \lambda h . \lambda y . \operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h} \cos \lambda x \, d\lambda -$$

$$- \frac{F}{e\pi} \int_0^\infty \left[\frac{(\lambda h . \operatorname{sh} \lambda h - \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y - \operatorname{ch} \lambda h . \lambda y . \operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{sh} 2\lambda h - 2\lambda h} + \frac{12 y}{8 h^3 \lambda^2} \right] \cos \lambda x . d\lambda$$

$$\sigma_y = - \frac{F}{e\pi} \int_0^\infty \frac{(\lambda h . \operatorname{ch} \lambda h + \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y - \operatorname{sh} \lambda h . \lambda y . \operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h} \cos \lambda x \, d\lambda +$$

$$+ \frac{F}{e\pi} \int_0^\infty \frac{(\lambda h . \operatorname{sh} \lambda h + \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y - \operatorname{ch} \lambda h . \lambda y . \operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{sh} 2\lambda h - 2\lambda h} \cos \lambda x \, d\lambda$$

$$\tau_{xy} = - \frac{F}{e\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda h . \operatorname{ch} \lambda h . \operatorname{sh} \lambda y - \operatorname{sh} \lambda y . \lambda y . \operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h} \operatorname{sen} \lambda x \, d\lambda +$$

$$+ \frac{F}{e\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda h . \operatorname{sh} \lambda h . \operatorname{ch} \lambda y - \operatorname{ch} \lambda h . \lambda y . \operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} 2\lambda h - 2\lambda h} \operatorname{sen} \lambda x \, d\lambda \quad ,$$

onde M é o momento flector na secção transversal de abcissa x, I o momento de inércia da secção em relação ao eixo perpendicular ao plano da figura e e a espessura da viga.

Como se vê a tensão σ_x pode decompor-se em duas partes, a primeira é o valor calculado pela fórmula elementar da resistência de materiais, a segunda representa o efeito produzido pela carga na vizinhança do seu ponto de aplicação.

Esta solução ainda é válida sòmente na hipótese do vão $2l$ ser suficientemente grande em relação à altura $2h$ da viga.

Na hipótese do vão ser qualquer o problema ainda não está resolvido.

Se a viga estiver submetida a fôrças quaisquer o problema será ainda mais difícil de resolver.

Para o caso dum corpo qualquer submetido a fôrças quaisquer pode, do exemplo elementar citado, avaliar-se a dificuldade de resolução do problema.

3 — Há por isso necessidade de recorrer a teorias particulares como a teoria da flexão das vigas, teoria da torsão dos prismas, teoria da flexão das placas, etc., reünidas hoje sob a designação de resistência de materiais.

Assim no caso duma viga submetida à flexão simples, isto é, sujeita a binários actuantes nos extremos, estabelece-se uma teoria baseada na hipótese de que as secções transversais se

mantêm planas após a flexão e desta hipótese resulta a possibilidade de determinar as tensões elásticas num ponto qualquer da peça.

Se a viga estiver submetida a fôrças normais ao eixo também a resistência de materiais permite a determinação das tensões num ponto qualquer. Mas neste caso, contràriamente ao que afirmam muitos autores, as secções transversais já não se mantêm planas após a deformação, devido à influência do esfôrço transverso. A teoria feita por êsses autores contém uma contradição interna sendo contudo legítimas as conclusões a que chegam. Na flexão produzida por cargas normais ao eixo da viga o perfil duma secção transversal toma depois da flexão a forma duma parábola cúbica cuja equação referida à tangente o x e à normal o y ao eixo da viga, é:

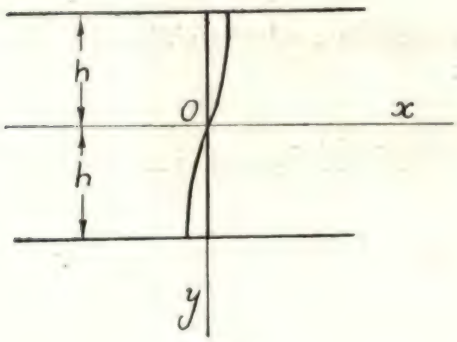


Fig. 2

$$x = -\frac{3}{2}\frac{\tau_m}{G}\left(y - \frac{y^3}{3h^2}\right)$$

onde τ_m representa a tensão tangencial média na secção e G o módulo de elasticidade de corte da substância da viga.

As teorias da resistência de materiais têm o grande inconveniente de serem aplicáveis sòmente a casos particulares. Assim a teoria da flexão das vigas dá valores aceitáveis sòmente no caso do vão ser suficientemente grande em relação às dimensões transversais da viga e além disso ùnicamente em pontos suficientemente afastados dos pontos de aplicação das fôrças exteriores, como veremos adiante.

Esta restrição é geral: todos os resultados da resistência de materiais só são legítimos a uma distância suficientemente grande dos pontos de aplicação das fôrças.

Da falta de generalidade das teorias da resistência de materiais resulta muitas vezes a necessidade de recorrer a métodos experimentais para a determinação das tensões nos corpos sólidos deformados. Mesmo para os casos em que os métodos analíticos fornecem resultados satisfatórios, o estudo experimental é indispensável pois fornece um conhecimento mais perfeito e duradouro.

Dêstes métodos experimentais o mais importante tanto sob o ponto de vista pedagógico, como pelas suas aplicações técnicas, é o da fotoelasticidade.

4 — A fotoelasticidade estuda o efeito das tensões elásticas sôbre as radiações luminosas.

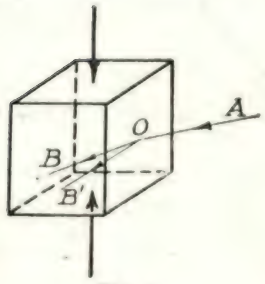


Fig. 3

Consideremos um paralelipípedo duma substância transparente, por exemplo, baquelite, e exerçamos sôbre duas faces opostas uma compressão; então a baquelite primitivamente monorefringente, torna-se birefringente, isto é, após a aplicação da compressão, a um raio de luz incidente A O corresponderão dois refractados OB e OB'.

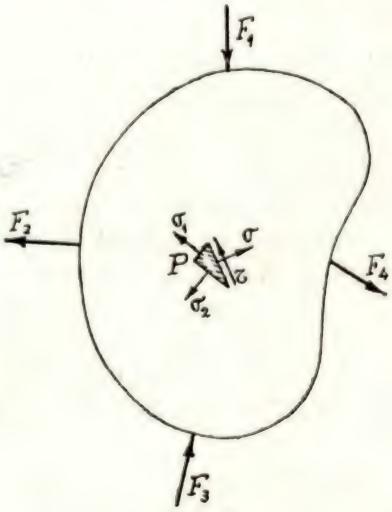


Fig. 4

Consideremos uma placa delgada de espessura e, de substância transparente, homogénea e isótropa, submetida a um sistema de fôrças F_1, F_2..., paralelas às faces da placa e actuantes nos seus bordos: é o que se chama um equilíbrio elástico plano.

É o caso de muitos equilíbrios que aparecem na construção, tais como de vigas de pequena espessura, de muitas estruturas isostáticas e hiperstáticas, etc.

Se examinarmos esta placa com luz polarizada observar-se-á uma figura que se modifica com as fôrças a que está submetida a peça.

No caso duma viga de baquelite submetida a uma fôrça F actuante a meio do vão, obteve-se a fig. 5.

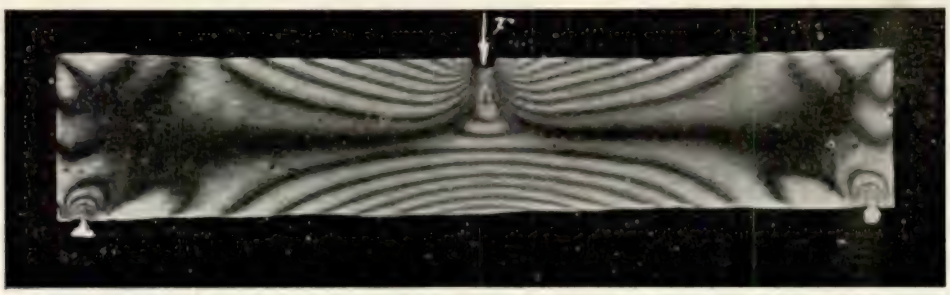


Fig. 5

Vamos ver como no caso duma placa qualquer se relaciona a figura obtida com as tensões elásticas desenvolvidas.

Num ponto P da placa, qualquer elemento de superfície normal às faces estará submetido a uma tensão normal σ e a uma tensão tangencial τ, paralelas às faces da placa; há, como mostra a teoria da elasticidade, em cada ponto P dois elementos de superfície ortogonais entre si sôbre os quais se exercem sòmente tensões normais σ_1 e σ_2, chamadas tensões principais no ponto P.

Para que o estado de tensão da placa fique completamente determinado é necessário conhecer para cada ponto:

a) a direcção das tensões principais, isto é, o ângulo α que faz uma delas, com uma direcção de referência.

b) a grandeza σ_1 e σ_2 das tensões principais.

O problema da determinação das tensões num equilíbrio elástico plano é pois um problema a 3 incógnitas: α, σ_1 e σ_2.

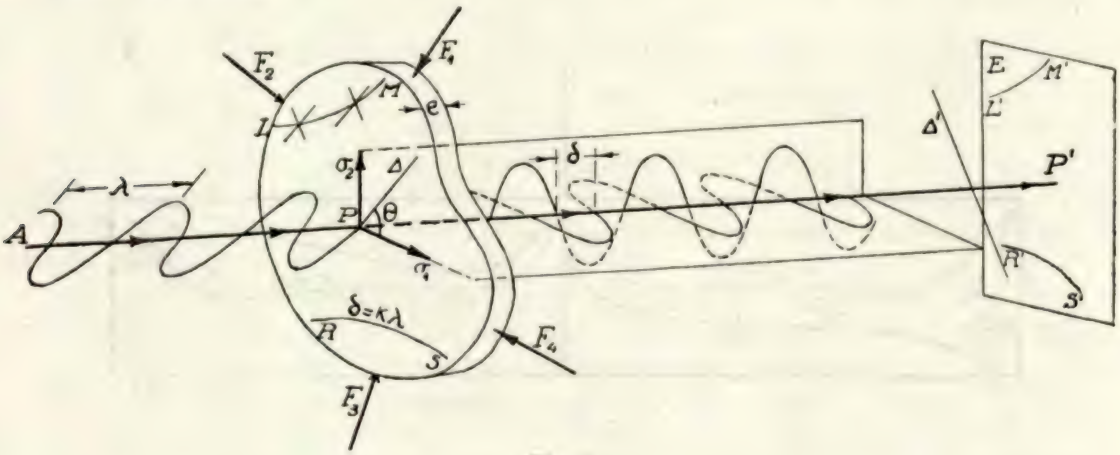


Fig. 6

Suponhamos que um raio de luz monocromática polarizada, AP, vibrando paralelamente a uma direcção Δ, incide normalmente às faces da placa.

Êste raio sofrerá ao encontrar a placa, que está submetida a fôrças, uma dupla refracção.

À saída da placa temos, com a mesma direcção do raio incidente, dois raios polarizados vibrando paralelamente às direcções das tensões principais σ_1 e σ_2 no ponto P. Estes dois raios apresentam uma diferença de marcha δ; mostra a experiência que δ é proporcional à espessura e da placa e à diferença das tensões principais, isto é:

$$\delta = c\, e\, (\sigma_1 - \sigma_2) \quad ,$$

sendo c uma constante que depende da substância da placa e do comprimento de onda λ da luz incidente.

Após a placa coloquemos um polarizador numa posição tal que permita a passagem de vibrações na direcção Δ' perpendicular a Δ. Êste polarizador chama-se analisador e diz-se que está cruzado com o polarizador que forneceu o raio incidente AP.

Recebamos num écran E a luz transmitida pelo sistema.

Mostra a óptica ondulatória que a intensidade de iluminação I no ponto P' do écran é dada pela expressão:

$$I = k \operatorname{sen}^2 2\theta \operatorname{sen}^2 \frac{\pi \delta}{\lambda} \quad ,$$

onde k é uma constante.

Haverá extinção de luz no ponto P' quando fôr $I = 0$; esta condição dá-se:

a) quando θ fôr um múltiplo de $\frac{\pi}{2}$, isto é, quando as direcções Δ e Δ' forem paralelas às direcções das tensões principais do ponto P.

b) quando δ fôr um múltiplo de λ, isto é, quando o atrazo dos dois raios emergentes fôr um número inteiro de comprimentos de onda.

Vejamos agora a figura de interferência que se obtém no écran quando iluminamos não sòmente o ponto P, mas tôda a placa por um feixe de luz polarizada vibrando paralelamente à direcção Δ.

Ao lugar geométrico LM dos pontos da placa nos quais as direcções das tensões principais são paralelas às direcções Δ e Δ' corresponderá no écran uma linha negra L' M'. Esta linha é chamada isoclínica porque em todos os seus pontos as direcções das tensões principais têm a mesma inclinação em relação a uma direcção de referência.

Como as direcções Δ e Δ' são conhecidas fica assim determinado o valor de α correspondente à isoclínica.

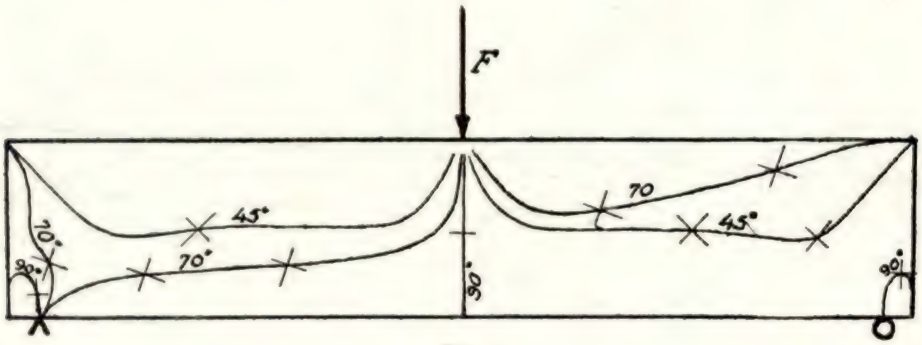


Fig. 7

A fig. 5 mostra uma isoclínica que está representada na fig. 7; para esta isoclínica $\alpha = 45°$, quando se toma a direcção de F para direcção de referência.

Se se rodar o sistema dos polarizadores mantendo-os cruzados então a isoclínica deforma-se e ao cabo duma rotação de 90° a curva percorreu necessàriamente tôda a peça.

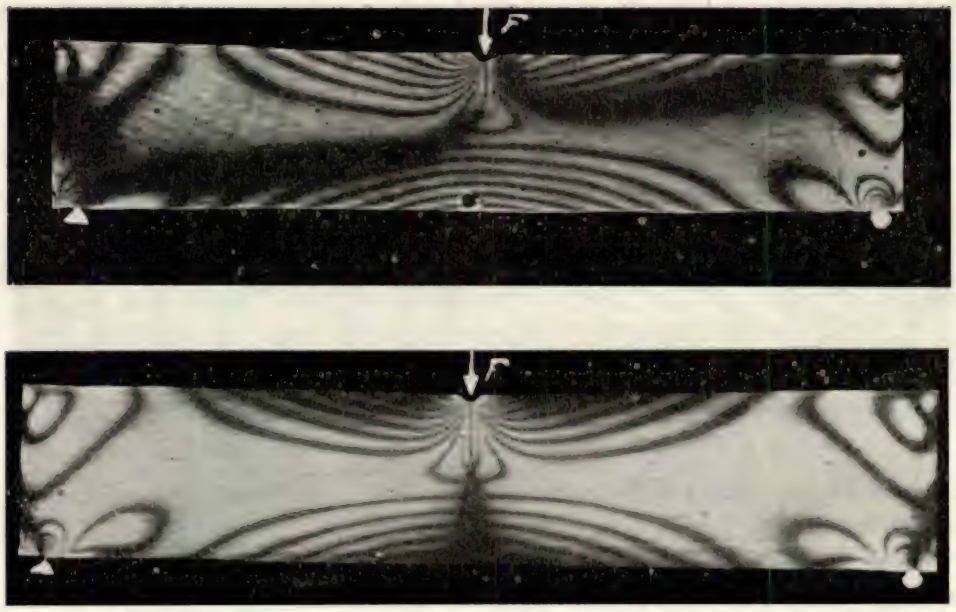


Fig. 8 e Fig. 9

No caso da viga submetida à fôrça F, as figs. 8 e 9 mostram as isoclínicas correspondentes respectivamente a $\alpha = 70^{\circ}$ e $\alpha = 90^{\circ}$; estas isoclínicas estão representadas na fig. 7.

A partir das isoclínicas pode fazer-se o traçado das isostáticas que são as envolventes das direcções das tensões principais; é um trabalho gráfico fácil de executar.

Na fig. 10 estão representadas as isoclínicas e as isostáticas no caso de duas rodas dentadas.

Mas como vimos também há extinção nos pontos onde δ fôr um múltiplo de λ, e portanto na imagem aparecem também linhas negras que correspondem aos lugares geométricos dos pontos da placa nos quais a diferença de marcha é λ, 2λ,.....

Enquanto que a linha negra isoclínica varia de forma com a posição dos polarizadores, as linhas negras de igual diferença de marcha têm forma invariável; esta circunstância permite distingui-las.

Demonstra-se que se introduzirmos entre o polarizador e a placa uma lâmina quarto de onda, e entre a placa e o analisador outra lâmina quarto de onda cruzada com a primeira, na figura de interferência desaparecem as isoclínicas permanecendo invariáveis as linhas de igual diferença de marcha. A fig. 11 foi obtida introduzindo as lâminas quarto de onda; desapareceram as isoclínicas, sendo mais fàcilmente observáveis as linhas de igual diferença de marcha.

Para se determinar o atrazo num ponto qualquer P basta contar o número de linhas negras que passa por êle durante a operação de aplicação das fôrças. Efectivamente quando passa no ponto pela primeira

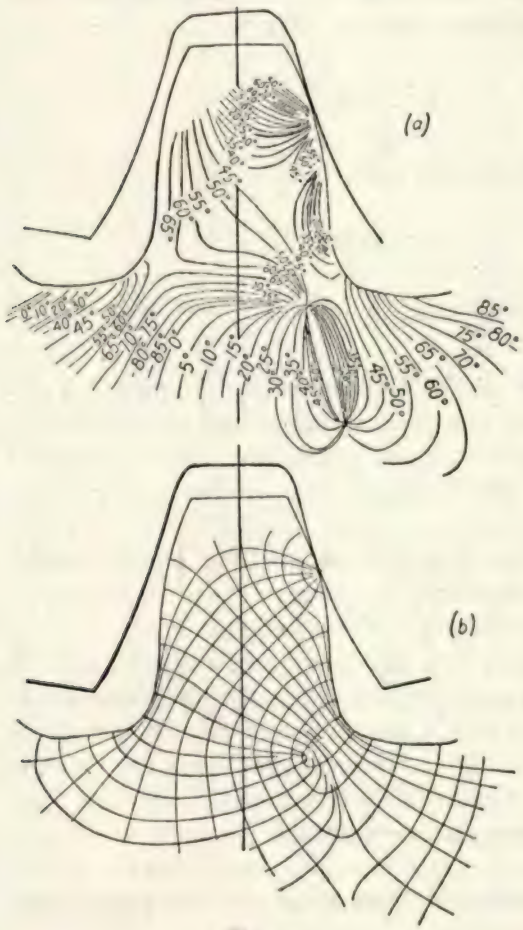


Fig. 10

vez uma linha negra isto indica que o atrazo atingiu o valor λ; quando passa outra atingiu o valor 2λ e assim sucessivamente.

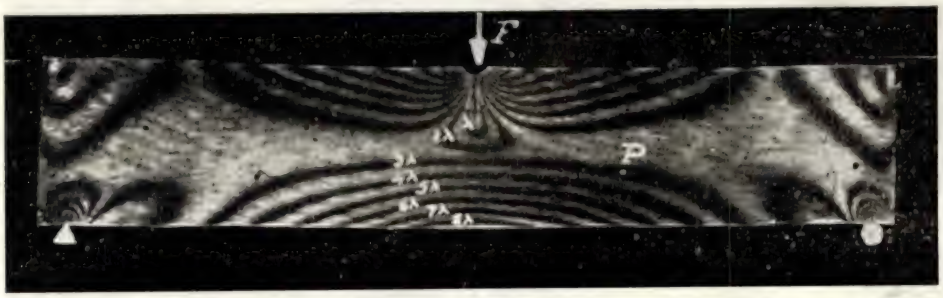


Fig. 11

Na fig. 11 estão indicados os atrazos correspondentes às linhas de igual diferença de marcha. Pelo ponto médio inferior da viga passaram 8 linhas, o que indica que nêle o atrazo é superior a 8λ.

Como vimos:

$$\delta = c\,e\,(\sigma_1 - \sigma_2) \quad ,$$

donde:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\delta}{c\,e} \quad .$$

Como δ é constante ao longo das linhas negras, estas são lugares geométricos de pontos da placa nos quais a diferença das tensões principais é constante, tendo o valor:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n\,\lambda}{c\,e} \quad ,$$

sendo n um número inteiro.

Fazendo $\frac{\lambda}{c} = k$, vem:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{k\,n}{e} \quad .$$

Podemos assim determinar a diferença das tensões principais nos pontos das linhas de igual diferença de marcha; num ponto que não pertença a estas linhas determina-se esta diferença por interpolação.

Consideremos o caso, estudado pelo prof. Frocht, duma viga de baquelite com $2\,l = 6''$ e $2\,h = 1''$, submetida a uma fôrça $F = 130{,}6$ lb.

O diagrama I da fig. 12 mostra a distribuïção da diferença das tensões principais ao longo duma secção transversal da viga à distância $0{,}1''$ do ponto de aplicação da fôrça; esta diferença apresenta um máximo absoluto na vizinhança da face superior da viga e um máximo relativo na face inferior.

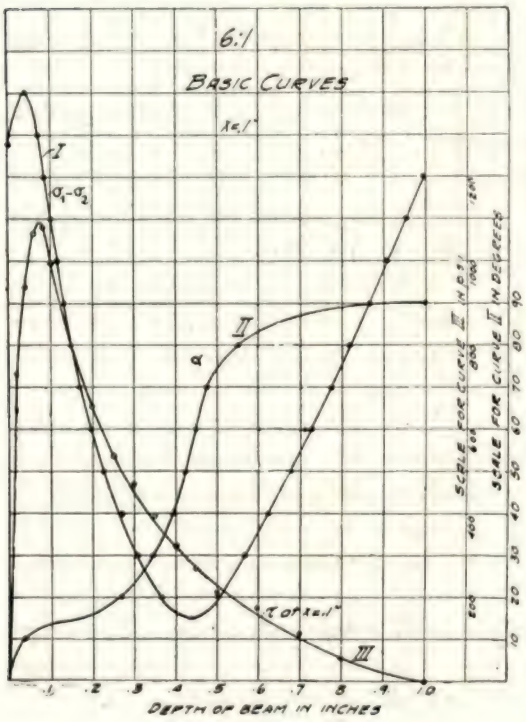


Fig. 12

A tensão tangencial τ actuante num elemento de superfície desta secção é dada pela conhecida expressão:

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha ,$$

sendo α o ângulo duma das tensões principais com a normal ao elemento; é dado pelas isostáticas.

O diagrama II da fig. 12 dá a distribuïção dos valores α ao longo da secção transversal considerada. O diagrama III representa os valores de τ calculados pela expressão anterior.

Ora a teoria da flexão da resistência de materiais afirma que a tensão tangencial τ está distribuída ao longo da secção transversal da viga segundo uma lei parabólica.

O cálculo de τ a partir dos valores obtidos experimentalmente para $\sigma_1 - \sigma_2$ e α, forneceu para diferentes secções transversais as curvas da fig. 13, que não têm analogia alguma com a parábola.

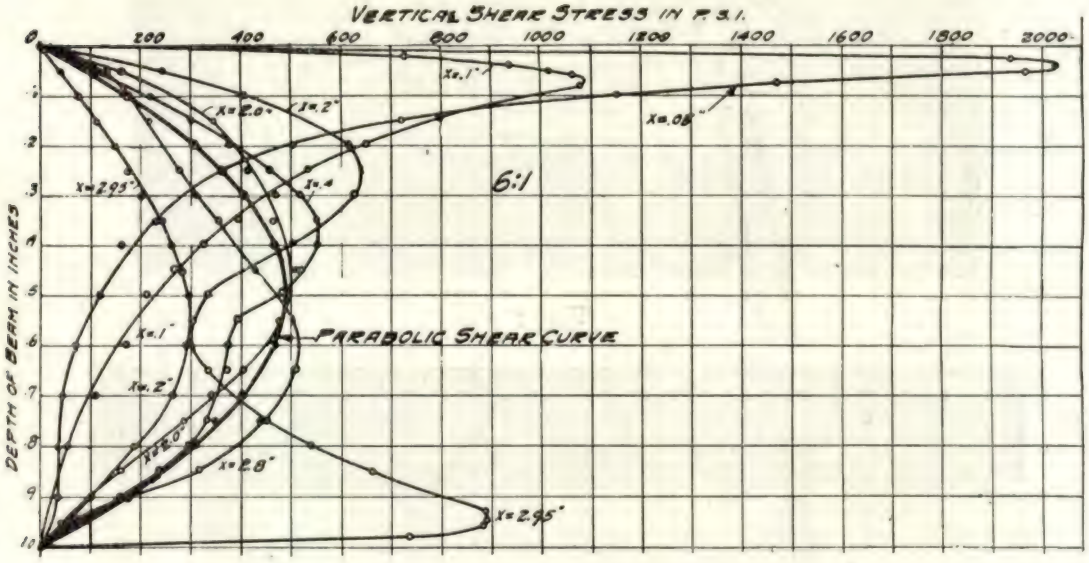


Fig. 13

Comparando as curvas desta figura vê-se que à medida que nos afastamos do ponto de aplicação de F elas tendem para a parábola, mas quando nos aproximamos dos apoios as curvas vão-se de novo afastando da parábola.

Como se vê a lei parabólica está longe de fornecer bons resultados, observando-se no caso apresentado tensões tangenciais cêrca de 4 vezes a tensão tangencial máxima dada pela lei parabólica; além disso a tensão tangencial máxima não se dá na superfície média como supõe a teoria elementar, mas sim na vizinhança do ponto de aplicação da fôrça.

Estes resultados experimentais estão de acôrdo com a solução de Seewald que apresentámos.

As discordâncias que apontámos entre os valores observados e os fornecidos pela lei parabólica da resistência de materiais têm importância sobretudo no cálculo de vigas de betão nas quais haverá a considerar tensões tangenciais maiores do que habitualmente se tomam, e também no cálculo de vigas I nas quais as abas devem estar submetidas a uma tensão tangencial importante; a repartição da tensão tangencial nas abas dos I deve ser bastante complexa pois não é legítimo supor que a tensão tangencial num ponto é paralela ao esfôrço transverso, suposição que se faz legitimamente para as secções rectangulares.

As figs. 14 e 15 mostram as linhas de igual diferença de tensões principais em vigas de pequeno e grande vão submetidas respectivamente a uma carga distribuída e a uma carga concentrada. Comparando as figs. 11 e 15 vê-se quanto importante é o valor da relação $\frac{h}{l}$ na distribuïção das tensões.

Fig. 14

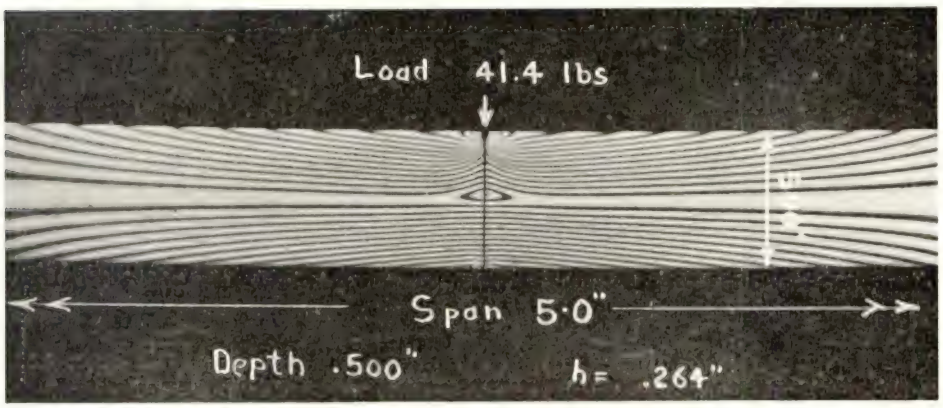


Fig. 15

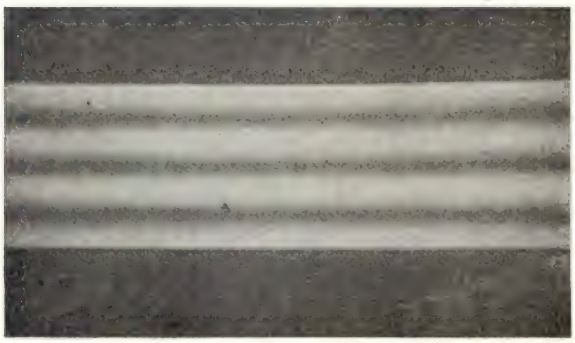


Fig. 16

A fig. 16 representa as linhas de igual diferença de tensões principais numa viga submetida à flexão simples. Comparando esta figura com a 11 vê-se a grande diferença que existe entre a flexão simples e a flexão produzida por fôrças perpendiculares ao eixo da viga. Na flexão simples, a uma distância suficientemente grande dos apoios, as linhas de igual diferença de tensões principais são paralelas, o que indica que em tôdas as secções o estado de solicitação elástica é o mesmo; àlém disso as linhas estão igualmente espaçadas, isto é, a diferença das tensões princi-

pais varia ao longo duma secção transversal segundo uma lei linear. Mas como na flexão simples uma das tensões principais é nula, conclui-se desta experiência que a tensão longitudinal na flexão simples distribuída está ao longo duma secção segundo uma lei linear, como é sabido.

Temos acompanhado esta exposição com o estudo da flexão de vigas de secção rectangular.

O estudo da flexão de peças prismáticas é fundamental pois grande parte das estruturas são constituídas por cunjuntos de peças prismáticas submetidas à flexão. Achamos por isso muito útil fazer um estudo completo de casos elementares de flexão, pois que se para êstes já se fizer um estudo grosseiro, será certamente muito deficiente o estudo de casos mais complexos.

Num ponto qualquer duma peça em equilíbrio elástico plano já sabemos determinar a direcção das tensões principais, definida por α, e a diferença $\sigma_1 - \sigma_2$ das tensões principais.

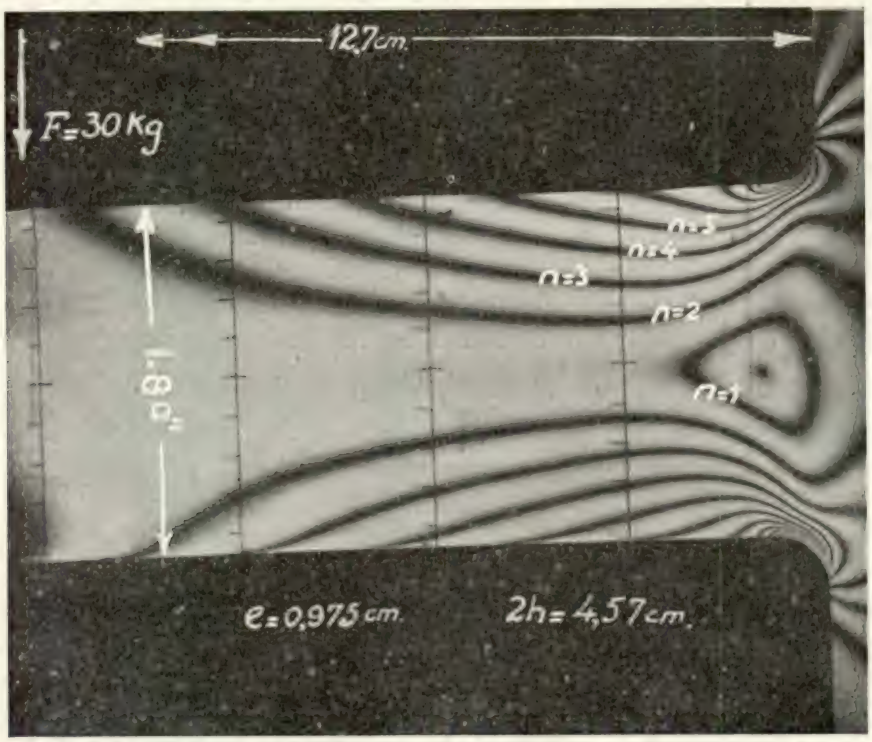


Fig. 17

5 — Basta o conhecimento de $\sigma_1 - \sigma_2$ para podermos determinar o estado de tensão num ponto da periferia da placa onde não haja fôrças exteriores aplicadas. Efectivamente neste ponto uma das tensões principais, σ_2 por ex., é nula, e portanto a diferença das tensões principais $\sigma_1 - \sigma_2$, que se pode determinar como vimos, será igual à tensão principal não nula: $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1$. Esta tensão σ_1 é dirigida tangencialmente ao contôrno da placa.

Se notarmos que é à superfície das peças que na grande maioria dos casos se dão as tensões máximas que são as que interessam ao engenheiro, vê-se quanto importante é esta determinação das tensões superficiais.

Consideremos o caso duma viga em consola submetida a uma fôrça actuando no extremo e normalmente ao eixo da viga.

Na fig. 17 estão representadas as linhas de igual diferença de tensões principais numa parte da viga. Desta figura podemos deduzir imediatamente o valor da diferença das tensões principais num ponto qualquer e portanto as tensões superficiais.

Como neste caso a constante $\frac{k}{e}$ tem o valor 14,9 kg/cm², a tensão superficial não nula é

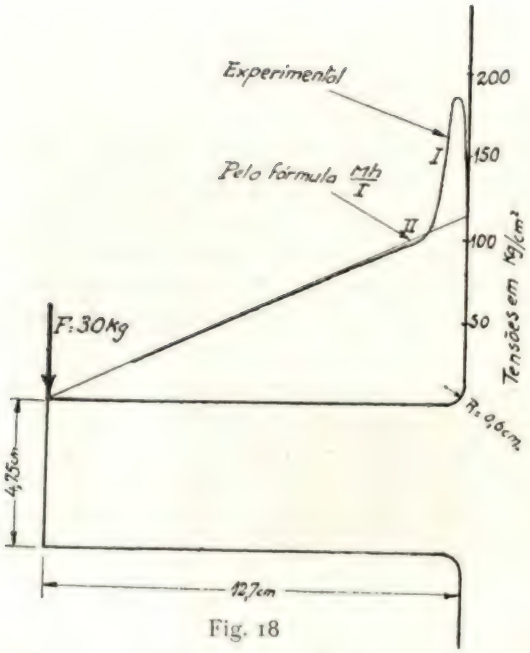


Fig. 18

dada pela expressão:

$$\sigma_1 = 14{,}9 \text{ n kg/cm}^2 \quad ,$$

estando os valores de n indicados na figura 17.

O diagrama I da figura 18 representa os valores de σ_1 no bordo superior da viga; o diagrama II representa os valores de σ_1 obtidos pela teoria da flexão da resistência de materiais.

A tensão máxima dá-se na zona de encastramento que a figura 19 representa em pormenor.

Note-se a pouca precisão dos valores dados pela resistência de materiais na região de encastramento; esta discordância provém de se desprezar na resistência de materiais, por dificuldade de cálculo, a concentração de tensões que sempre se dá junto dos pequenos raios de curvatura. O valor máximo da tensão superficial aumentará ràpidamente à medida que diminuir o raio de curvatura no encastramento.

Consideremos ainda o caso dum arco (fig. 20). Para qualquer posição da fôrça actuante podemos determinar a tensão elástica desenvolvida num ponto qualquer da periferia; basta contar o número n de linhas que na operação de aplicação da carga passam por êsse ponto, e multiplicar pela constante $\frac{k}{e}$.

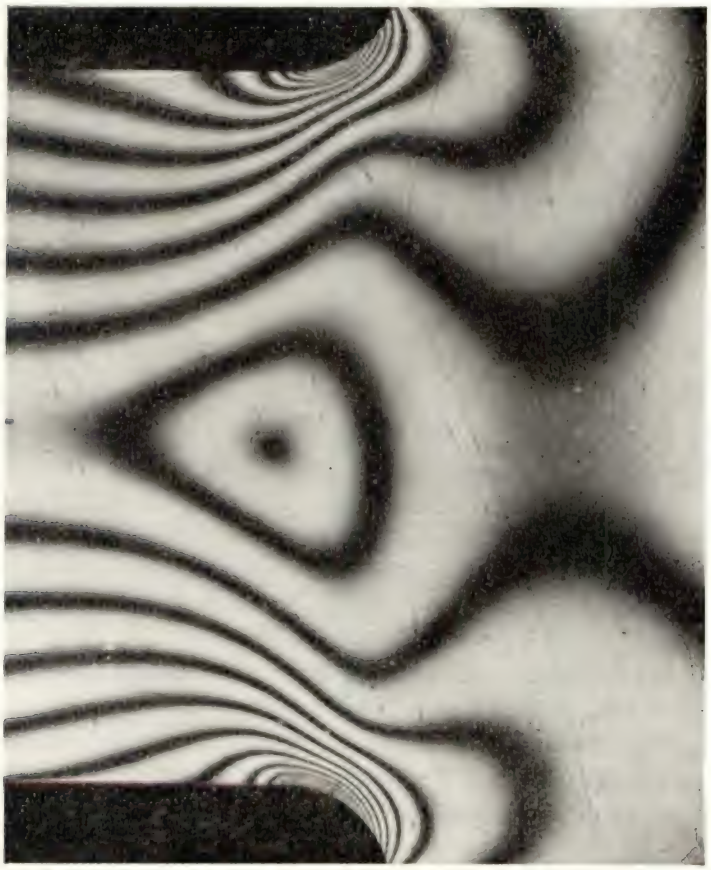


Fig. 19

Podemos assim determinar a tensão máxima à superfície da peça. Para estudar a forma mais conveniente a dar ao arco basta modificar, limando o modêlo por exemplo, e observar como varia a figura obtida.

Fig. 20

Por vezes dá-se o facto singular seguinte: diminuindo as dimensões numa certa região duma peça diminui também a tensão elástica máxima. Tal é o caso da flexão duma peça com as secções seguintes:

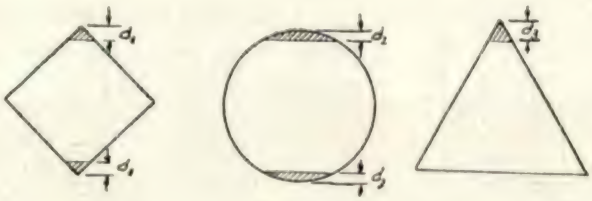


Fig. 21

se cortarmos as zonas a tracejado, mantendo as fôrças aplicadas, a tensão máxima diminui para valores de d_1, d_2 e d_3 convenientemente escolhidos (alguns por cento da altura da secção da peça).

Vimos que o conhecimento de $\sigma_1 - \sigma_2$ nos permite a determinação das tensões à superfície duma peça em equilíbrio elástico plano.

6 — Para calcularmos as tensões principais σ_1 e σ_2 num ponto P no interior da placa, como podemos determinar a sua diferença $\sigma_1 - \sigma_2$, basta-nos ter outra relação entre σ_1 e σ_2.

Vejamos como podemos determinar a soma $S = \sigma_1 + \sigma_2$ das tensões principais.

Sejam E e μ respectivamente o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da substância da placa, e e a sua espessura. Um elemento desta placa submetido às tensões principais σ_1 e σ_2 sofre uma contracção transversal Δe, dada pela conhecida expressão:

$$\Delta e = e \frac{E}{\mu} (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Portanto para conhecermos $\sigma_1 + \sigma_2$ basta medir a variação Δe da espessura da placa, quando se aplicam as fôrças. Esta variação de espessura é muito pequena (da ordem dos microns) havendo por isso dificuldade em medi-la. Contudo têm sido construídos aparelhos que dão a precisão suficiente, sobretudo os baseados sôbre fenómenos de interferência.

Conhecidos, pela fotoelasticidade, $\sigma_1 - \sigma_2$, e, por meio da medição da contracção transversal, $S = \sigma_1 + \sigma_2$, podemos determinar σ_1 e σ_2, que juntamente com α definem completamente o estado de solicitação elástica num ponto qualquer da placa.

Há ainda outros processos que permitem a determinação da soma $S = \sigma_1 + \sigma_2$.

Entre estes é muito interessante o estabelecido em 1931 por Den Hartog, baseado sôbre uma analogia mecânica.

Num equilíbrio elástico plano a soma S das tensões principais é uma função harmónica, isto é:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0.$$

Como sabemos na periferia da placa podemos determinar pela fotoelasticidade as tensões principais e portanto a sua soma S. Então o nosso problema consiste em determinar uma função S satisfazendo a esta equação e tomando sôbre o contôrno da placa valores conhecidos.

Vejamos em que consiste o método de Den Hartog.

Com uma fôlha metálica construamos um cilindro cuja secção recta tenha a mesma forma que o contôrno da placa cujo estado de solicitação elástica queremos estudar.

Em seguida marquemos sôbre a geratriz dêste cilindro que passa por A (fig. 22) um comprimento LM proporcional à soma das tensões principais no ponto correspondente A′ da placa.

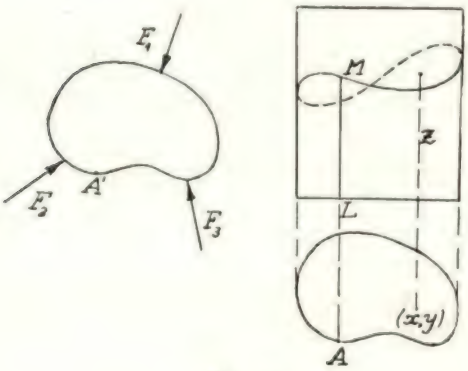


Fig. 22

Façamos o mesmo para tôdas as geratrizes. Os pontos extremos M dos segmentos marcados definem uma linha pela qual cortamos o cilindro. Sôbre os bordos obtidos estiremos uma membrana, de caoutchouc por exemplo, de tal modo que a tensão na membrana seja uniforme.

Ora pode mostrar-se que a ordenada z da membrana num ponto de coordenadas (x, y), satisfaz à equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$$

isto é, z é uma função harmónica.

Mas como vimos a soma $S = \sigma_1 + \sigma_2$ das tensões principais deve satisfazer a uma equação dêste tipo e como, por hipótese, sôbre o contôrno as funções z e S tomam valores proporcionais, conclue-se que para um ponto qualquer (x, y) a ordenada z representa, na escala em que marcámos os comprimentos LM, a soma das tensões principais no ponto correspondente da placa a estudar.

Êste método da membrana é geral para a integração experimental da equação de Laplace a duas variáveis:

$$\frac{\partial^2 f(xy)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(xy)}{\partial y^2} = 0 \quad ,$$

quando são conhecidos os valores de f (x, y) no contôrno do domínio de integração.

Determinados $\sigma_1 - \sigma_2$ e $\sigma_1 + \sigma_2$, podemos calcular as tensões principais σ_1 e σ_2.

Qualquer que seja o método usado é sempre bastante trabalhosa a determinação da soma S das tensões principais.

7 — Mas vejamos que ao engenheiro bastará a maior parte das vezes o conhecimento de $\sigma_1 - \sigma_2$ que se obtém directamente da figura de interferência.

Recordemos primeiramente um problema.

Seja σ_M a tensão longitudinal para a qual uma peça submetida à tracção começa a deformar-se permanentemente; designemos por σ_1, σ_2 e σ_3 as três tensões principais a que está submetido um elemento de volume dum sólido qualquer deformado.

O problema a que nos queríamos referir é o seguinte: será possível estabelecer leis que permitam, a partir do conhecimento de σ_M, determinar os valores de σ_1, σ_2 e σ_3 para os quais começa a deformação permanente do elemento de volume constituído pela mesma substância que a da peça para a qual se determinou σ_M?

Êste problema de grande interêsse para o engenheiro tem sido ùltimamente muito estudado nos países onde se pensa nestas questões.

Têm sido propostas várias teorias para resolver êste problema.

A teoria de Rankine consiste em afirmar que a deformação permanente começa quando a maior das tensões principais atinge σ_M; os resultados fornecidos por esta teoria estão longe de concordarem com os experimentais.

A teoria de St. Venant afirma que a deformação permanente começa quando a tensão tangencial máxima na peça considerada atinge o valor da tensão tangencial máxima ao iniciar-se a deformação permanente da peça submetida à tracção; esta teoria fornece resultados que concordam melhor com os experimentais.

Se é σ_M a tensão longitudinal na peça submetida à tracção quando começa a deformação permanente, é $\frac{\sigma_M}{2}$ a tensão tangencial máxima que como é sabido se dá em planos a 45° com a direcção de tracção. Mas se num ponto da placa é $\sigma_1 - \sigma_2$ a diferença das tensões principais, a tensão tangencial máxima é $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$; portanto a teoria de St. Venant afirma que a deformação permanente na placa começa quando $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ atinge $\frac{\sigma_M}{2}$, isto é, quando $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_M$.

Portanto ao engenheiro interessará sòmente o conhecimento de $\sigma_1 - \sigma_2$ que a fotoelasticidade permite determinar ràpidamente.

8 — Vamos agora abordar um problema importante.

Como temos visto podemos, pela fotoelasticidade, determinar as tensões elásticas desenvolvidas em corpos transparentes. Mas ao engenheiro o que interessa é conhecer as tensões elásticas desenvolvidas numa construção de aço, betão, etc.

Vejamos como se podem transportar para a construção os resultados obtidos com o modêlo de substância transparente.

Consideremos duas placas de substâncias diferentes com a mesma forma e sujeitas às mesmas fôrças; por exemplo uma de aço e outra de baquelite. Sejam P e P′ dois pontos correspondentes.

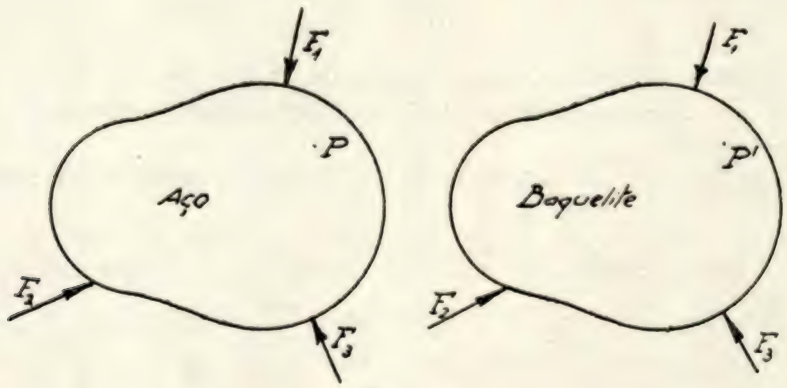


Fig. 23

Maurice Levy demonstrou em 1898 que as tensões elásticas desenvolvidas em P e P′ são as mesmas, isto é, não dependem da substância da placa.

Assim as tensões elásticas desenvolvidas na viga de baquelite que considerámos atrás são também as desenvolvidas numa viga de aço com a mesma forma e sujeita às mesmas fôrças.

Consideremos agora o caso mais geral, bastante importante nas aplicações, das placas serem domínios mùltiplamente conexos, isto é, consideremos o caso das placas terem aberturas nos bordos das quais actuam fôrças F_4, F_5, ...

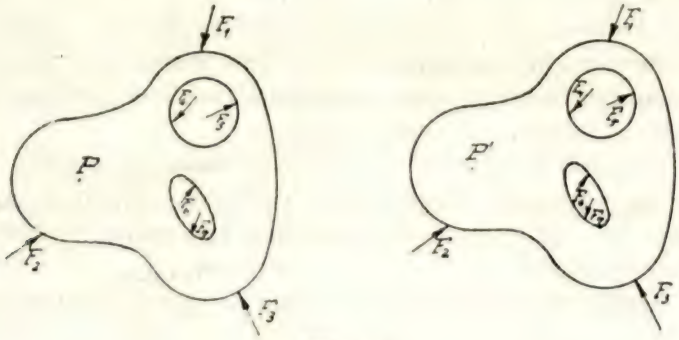


Fig. 24

M. Michell demonstrou que as tensões elásticas em dois pontos correspondentes P e P', são as mesmas desde que as fôrças actuantes no contôrno de cada abertura se equilibrem mùtuamente ou sejam equivalentes a um binário.

Assim no caso duma viga Vierendeel, basta que no contôrno das aberturas não actue fôrça alguma para que as tensões desenvolvidas sejam independentes da substância da viga.

Abordemos agora o caso duma peça com aberturas que estão sujeitas a fôrças que não se equilibram nem são equivalentes a binários.

É o que se dá numa roda sôbre a qual o eixo exerce fôrça F_1, e também num tirante submetido às fôrças F_2.

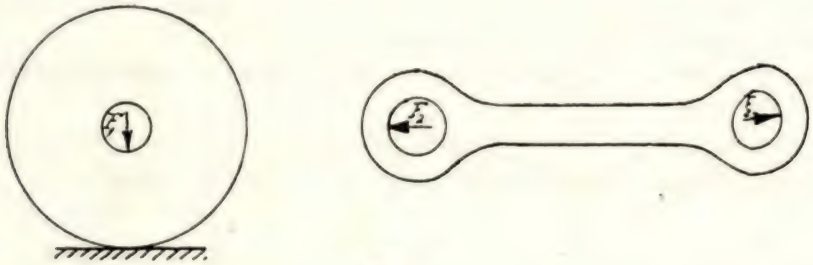


Fig. 25

Nestes casos as tensões elásticas desenvolvidas dependem da substância da peça.

Mas vamos ver que a teoria da elasticidade dos corpos mùltiplamente conexos permite fazer o transporte dos resultados.

Consideremos então duas peças com a mesma forma e sujeitas às mesmas fôrças, mas de

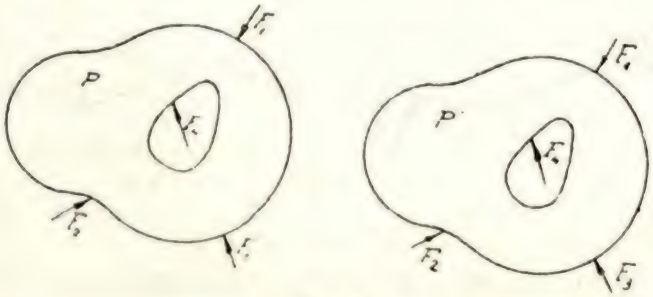


Fig. 26

substâncias diferentes. Suponhamos para simplificar que têm apenas uma abertura; seja F_4 a resultante das fôrças que actuam sôbre o contôrno da abertura.

Designemos por σ_x, σ_y e τ_{xy} e por σ'_x, σ'_y e τ'_{xy} as tensões elásticas em dois pontos correspondentes P e P′ respectivamente da primeira e da segunda placa.

Vamos ver que é possível relacionar estas grandezas.

Retiremos as fôrças aplicadas à segunda placa e efectuemos um corte rectilínio A B de direcção perpendicular à direcção da resultante F_4; imprimamos um pequeno deslocamento h_1 dum bordo do corte em relação ao outro; cimentemos os dois bordos do corte.

Então, devido a êste deslocamento, a placa ficará submetida a um sistema de tensões elásticas; sejam σ''_x, σ''_y e τ''_{xy} as tensões elásticas no ponto P′.

Dos estudos de Michell, Weingarten e Volterra sôbre a elasticidade das placas mùltiplamente conexas, resulta que:

$$\sigma_x = \sigma'_x + K\sigma''_x .$$
$$\sigma_y = \sigma'_y + K\sigma''_y$$
$$\tau_{xy} = \tau'_{xy} + K\tau''_{xy} ,$$

sendo:

$$K = -F_4 \frac{\mu - \mu'}{E' h_1 e} ,$$

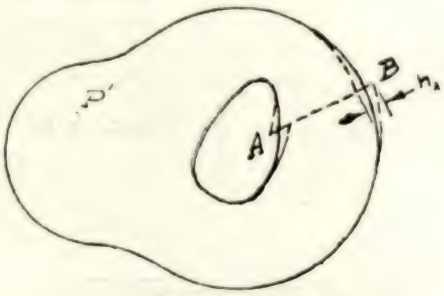


Fig. 27

onde μ e μ' são os coeficientes de Poisson da primeira e segunda placa respectivamente, E′ o módulo de elasticidade da segunda placa e e a espessura das placas.

Êste resultado generaliza-se fàcilmente para o caso dum número qualquer de aberturas.

Note-se que em geral o factor K é muito pequeno, isto é, as tensões desenvolvidas nas duas placas pouco diferem.

Conclusão: num equilíbrio elástico plano há sempre possibilidade de transportar para a construção os resultados obtidos como um modêlo.

Nos equilíbrios elásticos a 3 dimensões é fácil de mostrar que as tensões elásticas desenvolvidas dependem da relação dos coeficientes de elasticidade da substância do corpo.

9 — Vamos agora apresentar alguns dos muitos problemas de interêsse técnico que têm sido estudados pela fotoelasticidade.

Pela freqüência com que aparece nas aplicações é muito importante o estudo das tensões desenvolvidas numa peça submetida a duas fôrças F situadas a uma distância 2 b suficientemente pequena em relação ao comprimento da peça. Diz-se que a peça está submetida ao corte.

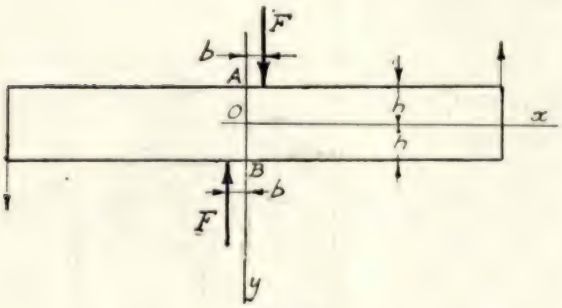


Fig. 28

Numa secção transversal A B a resistência de materiais supõe que a distribuïção da tensão tangencial τ_{xy} segue a lei parabólica. De facto a distribuïção desta tensão está longe de seguir esta lei.

A fig. 29 mostra as linhas de igual diferença de tensões principais numa peça submetida ao corte.

A teoria da elasticidade demonstra e a experiência confirma que para a secção transversal a igual distância das fôrças F a distribuïção da tensão tangencial é a indicada pelos diagramas da fig. 30; como se vê depende da relação $\frac{b}{h}$. Para pequenos valores de $\frac{b}{h}$ as curvas não têm analogia alguma com a parábola. À medida que

Fig. 29

aumenta o valor de $\frac{b}{h}$ então a lei de distribuïção vai-se aproximando da lei parabólica que é verificada para $\frac{b}{h}$ suficientemente grande.

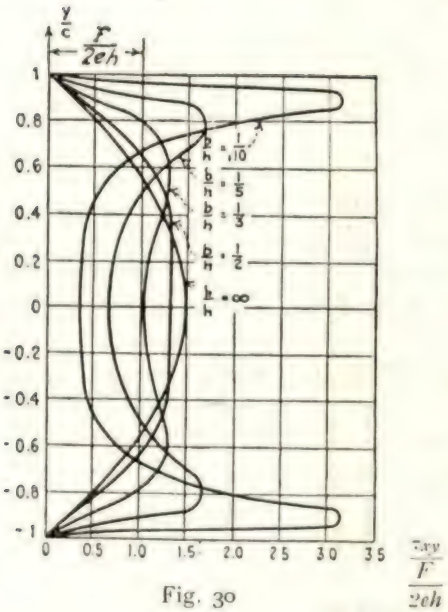


Fig. 30

As tensões tangenciais máximas para pequenos valores de $\frac{b}{h}$ não se dão na fibra média mas sim na vizinhança das faces da viga. No caso $\frac{b}{h} = \frac{1}{10}$ a tensão tangencial máxima é cêrca de duas vezes a tensão máxima dada pela lei parabólica.

Um outro problema muito importante tanto no cálculo de estruturas como no de máquinas, é o da concentração de tensões que se produz junto dos pequenos raios de curvatura da superfície das peças.

Consideremos em primeiro lugar o caso duma peça com um furo circular, submetida a uma tracção F (fig. 31).

Geralmente considera-se êste furo como uma simples diminuïção da secção transversal da peça, mas o que efectivamente se passa é bastante diferente.

Na fig. 32 nota-se que as tensões são muito elevadas na vizinhança dos pontos C e D; diz-se que existe nestas regiões uma concentração de tensões.

Num ponto P da secção transversal de área mínima AB, à distância d do centro do furo, a tensão σ_y paralela à tracção aplicada é dada pela expressão:

$$\sigma_y = \frac{F}{4\,e\,l}\left(2 + \frac{r^2}{d^2} + 3\frac{r^4}{d^4}\right),$$

estabelecida pela teoria da elasticidade no caso da largura 2l ser suficientemente grande em relação ao diâmetro 2r do furo; a curva LM da fig. 31 representa gràficamente esta função.

Mostra esta curva que a tensão σ_y cresce ràpidamente quando P se aproxima de C e D. Nestes pontos é d = r e portanto vem:

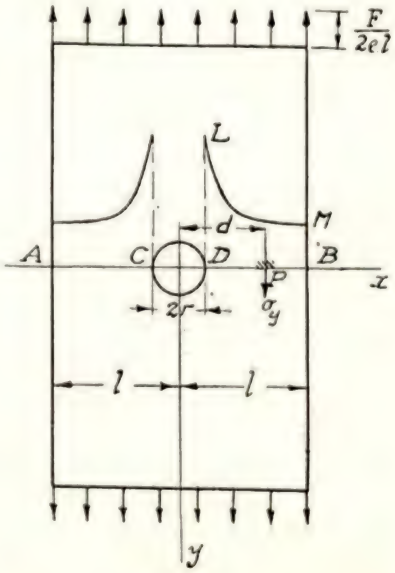


Fig. 31

$$\sigma_y'' = 3\frac{F}{2el},$$

isto é, a tensão nestes pontos é tripla da tensão média $\frac{F}{2el}$. Claro que se a largura 2l é suficientemente grande em relação ao diâmetro do furo, é muito pequena a correcção introduzida se calcularmos a tensão média relativa à secção reduzida. Conclusão: a tensão máxima é tripla da tensão calculada ordinàriamente.

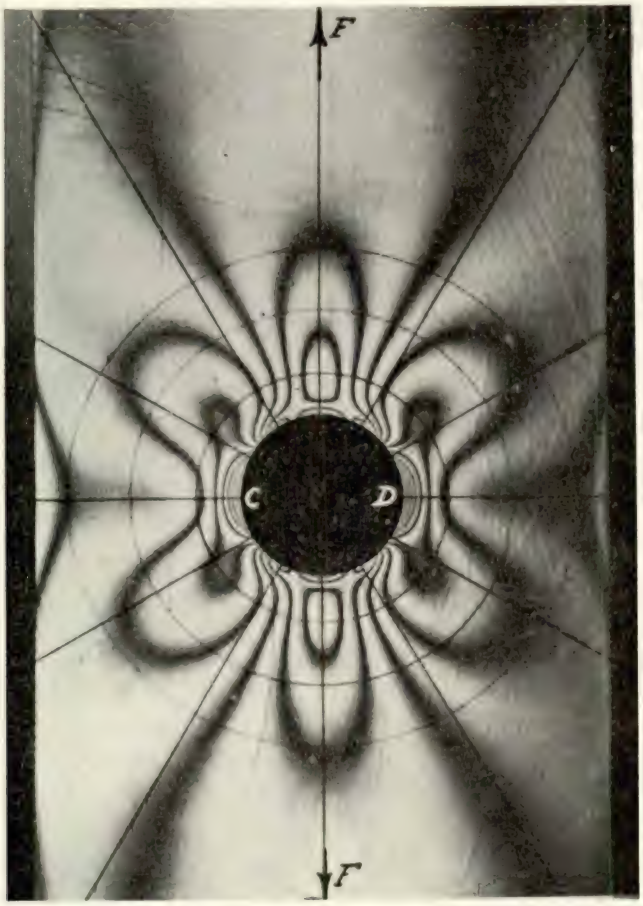


Fig. 32

Vamos agora examinar o caso da largura 2l ser qualquer. À medida que 2l diminui a curva L M vai-se deformando e julgar-se-ia talvez que ela tendia para uma recta paralela a A B, isto é, que a distribuïção das tensões tendia a ser uniforme na secção A B; mas não. Essa curva tende para uma recta L' M', sendo M' tanto mais próximo de B quanto menor fôr a largura da peça em relação ao diâmetro do furo. Isto é, a tensão máxima tende para duas vezes a tensão média obtida dividindo F pela secção útil da peça.

É também curiosa a distribuïção da tensão longitudinal σ_y ao longo dos bordos rectilínios da peça (fig. 33); tem um mínimo e dois máximos. Como a secção transversal que passa por A é a de área mínima poder-se-ia julgar que em A a tensão longitudinal era máxima e que iria diminuindo à medida que a secção aumentava.

Dêstes resultados se conclue quanto é pretencioso resolver problemas de determinação de tensões com auxílio da chamada «intuïção».

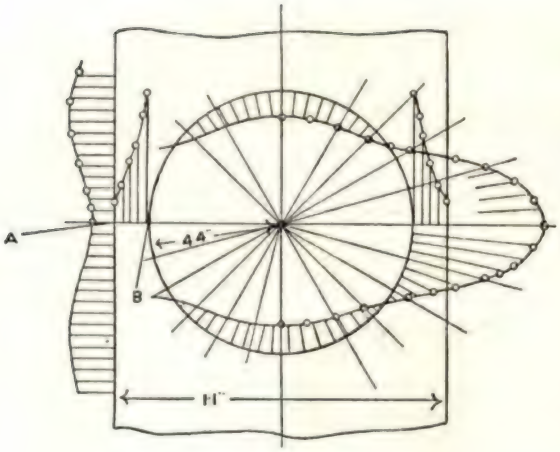


Fig. 33

Na fig. 33 estão também representados os valores da tensão superficial no bordo do furo; esta tensão é máxima, tracção, nos pontos extremos do diâmetro perpendicular a F, e mínima, compressão, nos extremos do diâmetro paralelo a F.

Para mostrar a importância da concentração de tensões nos bordos dos furos apresentamos o caso da peça de baquelite da fig. 34, que foi submetida a um ensaio de tracção. Apesar da secção que passa pelo centro do furo ter uma secção útil maior que a secção da parte média da peça, a fractura deu-se na secção do centro do furo devido à concentração de tensões.

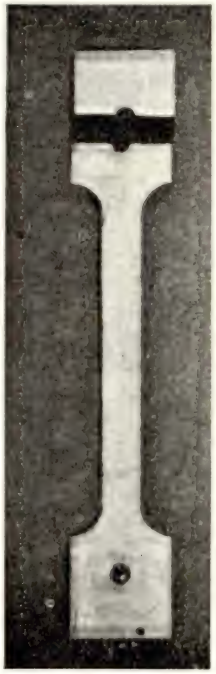


Fig. 34

Abordemos ràpidamente o estudo duma peça com vários furos circulares submetida a uma tracção. A determinação das tensões por via analítica ainda não foi feita no caso geral.

O estudo dêste caso pela fotoelasticidade não apresenta dificuldades especiais.

A fig. 35 mostra o caso duma peça com 3 furos circulares, submetida a uma tracção normal a linha dos centros. Na parte superior da figura estão representadas as isoclínicas e na parte inferior as isostáticas.

Da observação das isostáticas conclue-se que a perturbação produzida pelos furos desaparece a pequena distância dêstes, pois as isostáticas tendem ràpidamente para uma rêde rectangular.

Estas indicações qualitativas são preciosas para quem tem necessidade de conhecer a distribuïção das tensões.

A tensão máxima produz-se em B e a mínima em A.

Na fig. 36 estão representadas as isoclínicas e as isostáticas numa peça com 6 furos circulares, submetida à tracção.

No caso de peças com furos elípticos a determinação analítica das tensões é bastante difícil, sendo muito pequeno o número de problemas resolvidos.

Numa peça submetida à tracção F, e com um furo elíptico tendo um dos eixos, e_1, perpendicular à direcção da tracção, a teoria da elasticidade dá o seguinte valor para a tensão nos pontos extremos dêste eixo:

$$\sigma = \frac{F}{2\,e\,l}\left(1 + 2\frac{e_1}{e_2}\right), \qquad 2)$$

sendo e_2 o outro eixo do furo elíptico; esta expressão é válida no caso da largura $2\,l$ da peça ser suficientemente grande em relação a e_1.

No caso do furo circular é $e_1 = e_2$ e vem $\sigma = \frac{3\,F}{2\,e\,l}$, como já vimos.

Conclue-se da expressão 2) que se e_2 fôr muito pequeno em face de e_1 a tensão σ pode atingir um valor extremamente elevado.

Assim consideremos o caso duma peça com uma fenda normal ao eixo da peça; pode assimilar-se a fenda a uma abertura elíptica na qual e_1 é muito grande em face de e_2. Haverá portanto nos extremos da fenda uma forte concentração de tensões. Se substituirmos os extremos da fenda por furos circulares (fig. 37), então a tensão diminuïrá consideràvelmente. É o procedimento que correntemente se observa para evitar o progresso de fendas nos vidros das montras.

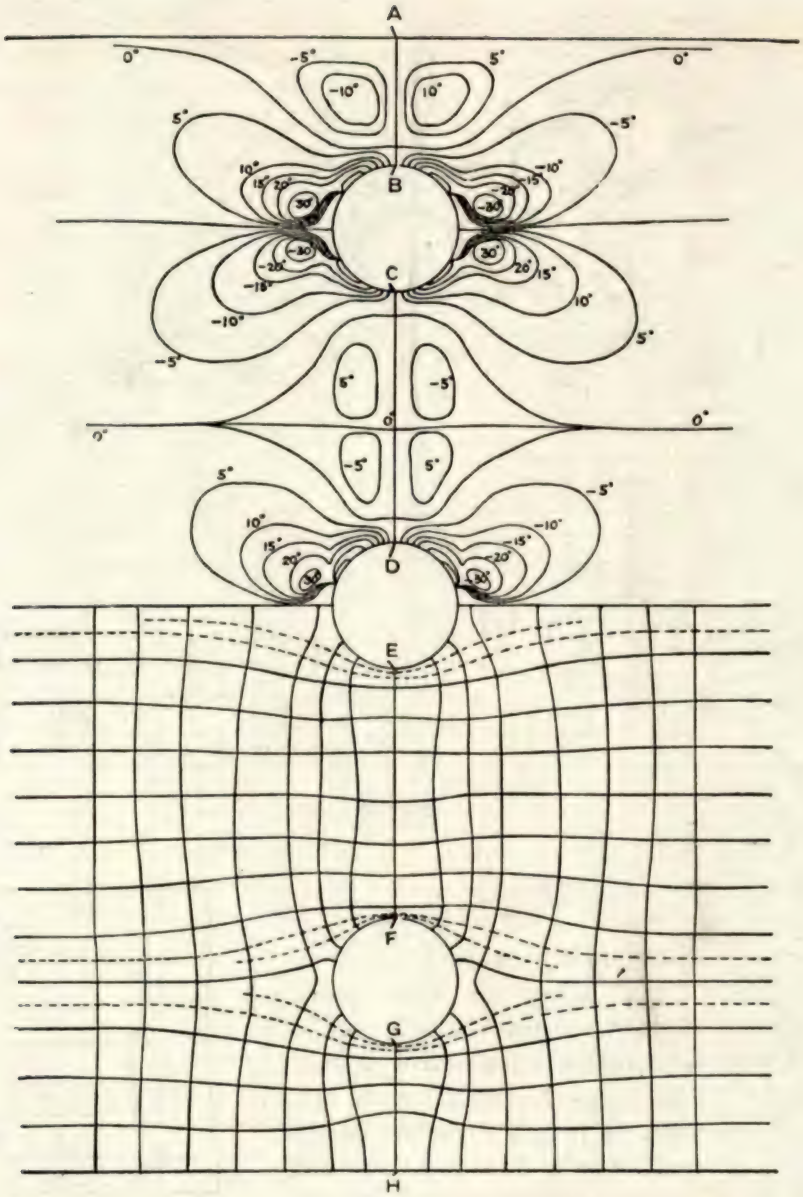


Fig. 35

Consideremos agora uma viga com furos circulares. Na vizinhança dêstes furos dá-se uma concentração de tensões; as tensões longitudinais nos pontos duma secção transversal já não seguirão a lei linear. A fig. 38 refere-se a uma viga submetida à flexão simples; as tensões máximas de tracção e compressão não se produzem nas faces inferior e superior da viga mas sim nos bordos dos furos como indica a figura. No caso dêstes furos terem rebites a tensão máxima é ainda maior.

Em tôdas as peças com furos que temos considerado as tensões desenvolvidas são independentes da substância da peça, visto que nos bordos dos furos não actuam fôrças.

Abordemos agora o estudo duma hipótese fundamental da resistência de materiais. É a seguinte: uma carga axial produz uma distribuïção uniforme de tensões.

Consideremos o caso duma coluna de secção rectangular submetida a uma compressão (fig. 39). Afirma-se na teoria elementar que a peça está submetida a uma tensão de compressão uniforme, paralela à fôrça F, e de grandeza:

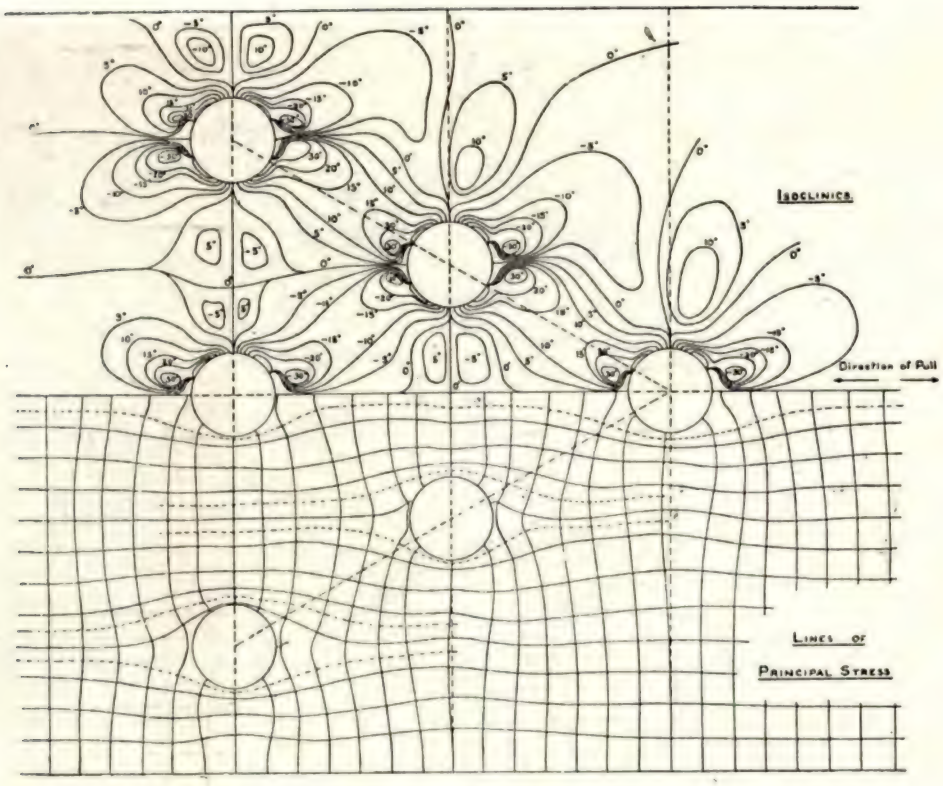


Fig. 36

Fig. 37

$$\sigma_y = \frac{F}{2\,l\,e},$$

sendo e a espessura da peça.

A figura de interferência (fig 40) mostra que sòmente a uma distância dos pontos de aplicação das fôrças cêrca da largura da peça a distribuïção das tensões se pode supor uniforme, pois só a essa distância a coloração da peça é uniforme.

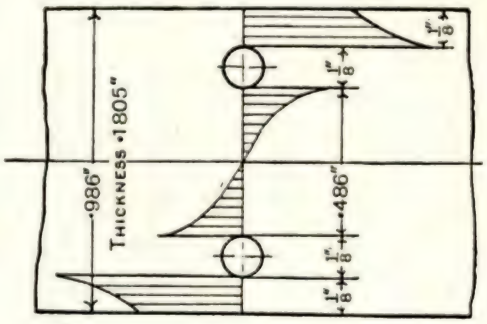


Fig. 38

A teoria da elasticidade dá o valor da tensão de compressão σ_y num ponto de coordenadas (x, y), no caso da altura 2 h ser suficientemente grande em relação às dimensões da secção transversal. É:

$$\sigma_y = \frac{F}{2\,l\,e} + \frac{2\,F}{e\,a\,\pi} \sum_{m=1}^{m=\infty} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{m\,\pi}{l}\,a}{m} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(\frac{m\,\pi}{l}\,h \,.\, \operatorname{ch}\frac{m\,\pi}{l}\,h + \operatorname{sh}\frac{m\,\pi}{l}\,h\right) \operatorname{ch}\frac{m\,\pi}{l}\,y - \frac{m\,\pi}{l}\,y \,.\, \operatorname{sh}\frac{m\,\pi}{l}\,y \,.\, \operatorname{sh}\frac{m\,\pi}{l}\,h}{\operatorname{sh} 2\,\frac{m\,\pi}{l}\,h + 2\,\frac{m\,\pi}{l}\,h} \cdot \cos\frac{m\,\pi}{l}\,x,$$

sendo 2 a a largura infinitesimal na qual está aplicada a fôrça F.

A primeira parcela é o valor dado pela resistência de materiais, e a segunda representa o efeito da fôrça F na vizinhança do seu ponto de aplicação.

Esta expressão de σ_y calculada para as secções às distâncias $\frac{l}{2}$, l e 2l das bases dá os valores indicados nos diagramas da fig. 39. A uma distância do ponto de aplicação de F cêrca da

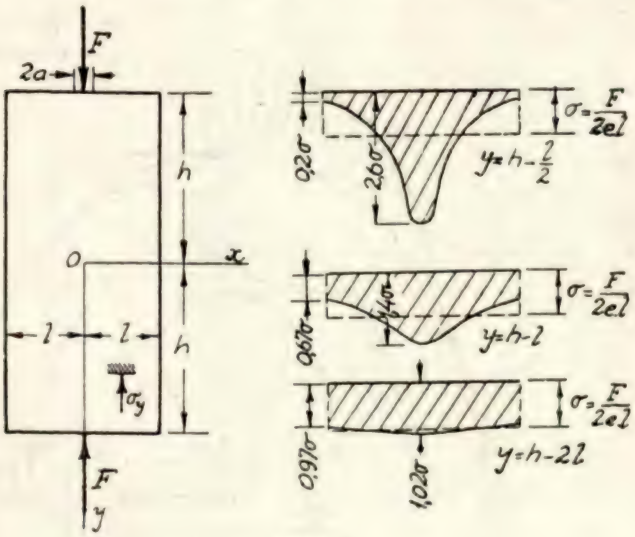


Fig. 39

largura 2l da peça a distribuïção da tensão σ_y pode supor-se uniforme com um êrro inferior a 3%.

Se a peça fôr suficientemente curta não tem significado algum a consideração da tensão média $\frac{F}{2el}$.

Consideremos uma peça prismática assente sôbre uma fundação. A distribuïção das tensões na superfície de contacto com a fundação depende dos módulos de elasticidade das substâncias da coluna e da fundação. No caso da fundação ser bastante mais elástica do que a coluna, a distribuïção das tensões normais na base foi determinada analiticamente por Sadowski em 1932; essa distribuïção tem a forma indicada no diagrama da fig. 41, tendendo a tensão para infinito nos pontos A e B.

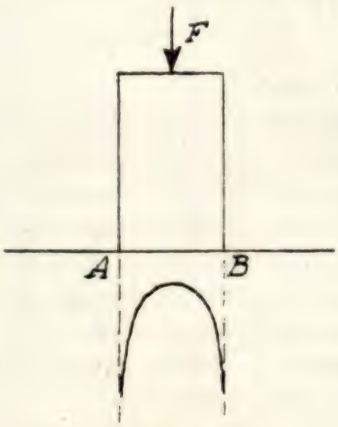


Fig. 41

Fig. 40

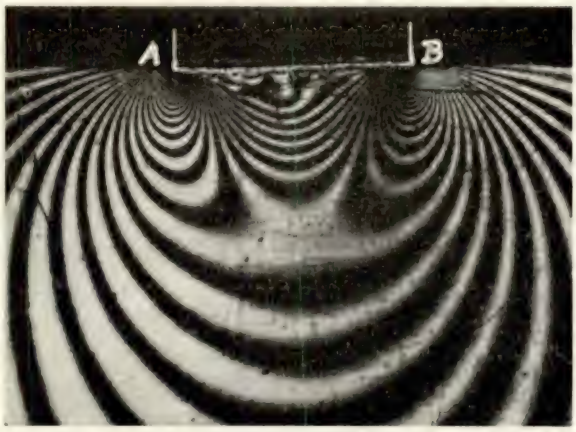


Fig. 42

Na fig. 42 a coluna AB é de aço e a fundação de baquelite; nos pontos A e B há fortes concentrações de tensão.

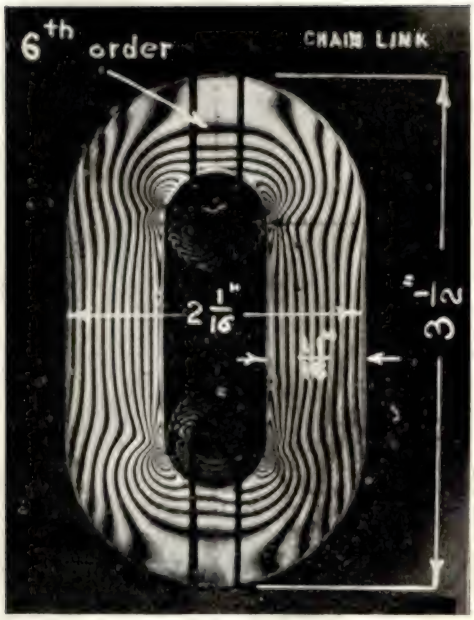


Fig. 43

Convém dar à base uma forma tal que a distribuïção das tensões seja uniforme; êste problema também foi resolvido por Sadowski.

Consideremos agora o caso dum elo duma cadeia submetido a duas fôrças actuantes no contôrno da abertura (fig. 43).

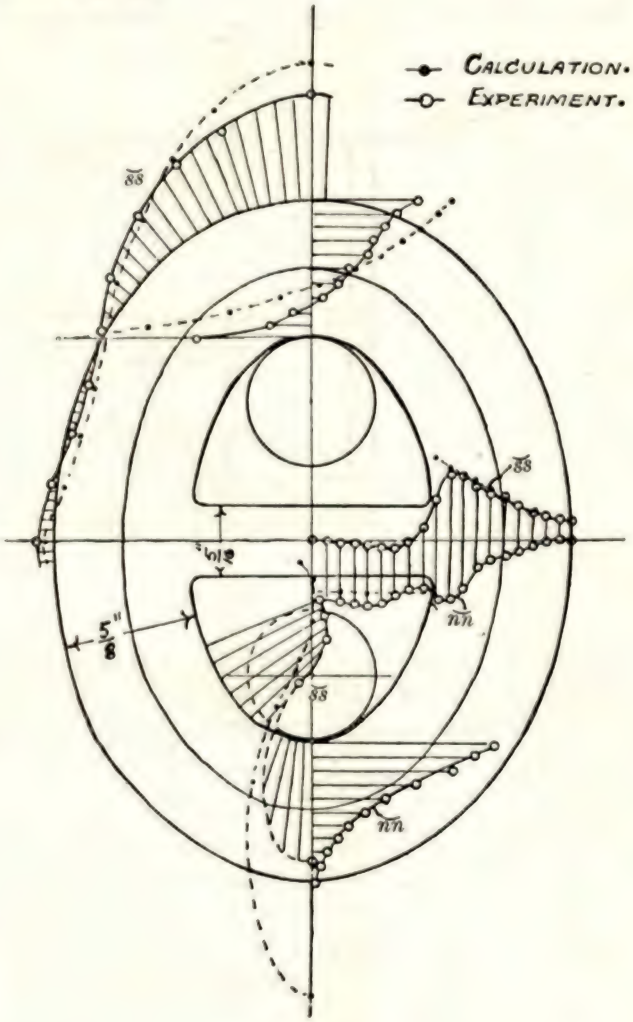


Fig. 45

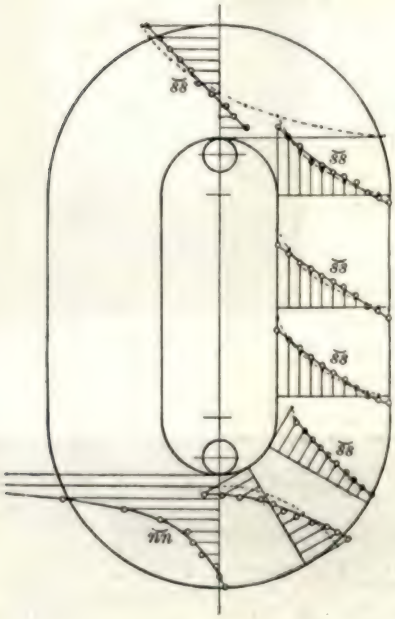


Fig. 44

Na fig. 44 podem comparar-se os resultados obtidos experimentalmente com os fornecidos pela teoria das peças curvas de Pearson Winkler. Há concordância excepto junto dos pontos de aplicação das fôrças onde os valores dados por esta teoria são muito mais elevados do que os observados; esta discordância resulta do facto das fôrças não serem concentradas, como supõe essa teoria, mas distribuídas numa área que depende da forma e rigidez das peças que exercem as fôrças.

Êste elo é um domínio mùltiplamente conexo, mas como a resultante das fôrças que actuam na abertura é zero, as tensões desenvolvidas são independentes da substância do elo.

A fig. 45 refere-se a um elo com travessa. Dos diagramas podem comparar-se os valores obtidos experimentalmente e os dados pela teoria de Pearson Winkler; dum modo geral há concordância, excepto na vizinhança dos pontos de aplicação das fôrças.

Estamos em face dum exemplo dum corpo mùltiplamente conexo no qual as tensões desen-

volvidas dependem da substância da peça, visto que sôbre o contôrno de cada abertura actua uma só fôrça.

As figuras de interferência 46 e 47 foram obtidas no estudo de molas de veículos. Como se vê a parte terminal de cada lâmina está submetida a um estado de tensões bastante diferente do da região média.

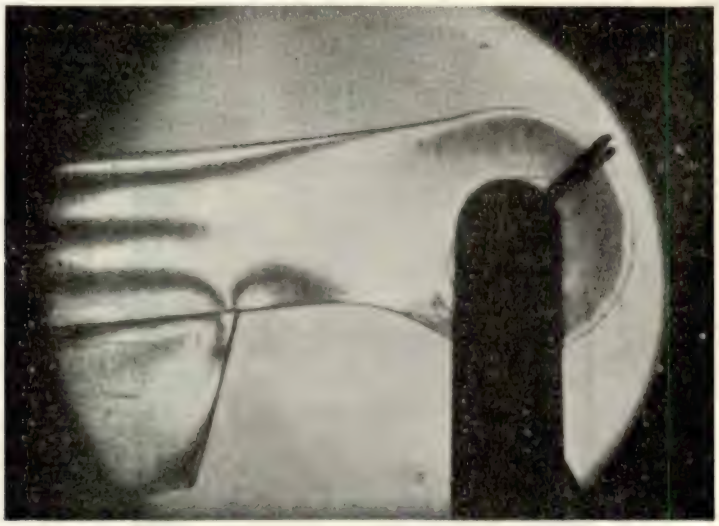


Fig. 46

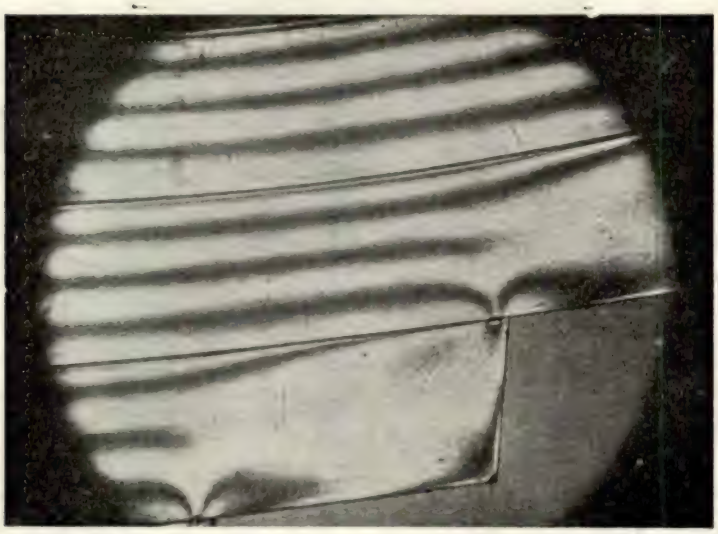


Fig. 47

Estudemos agora as tensões desenvolvidas na peça de ensaios de cimentos à tracção usada entre nós e em França.

Como se vê na fig. 48 há fortes tensões na vizinhança dos pontos de aplicação das fôrças.

A região por onde se viria a dar a fractura não se apresenta uniformemente colorida e portanto a peça não está submetida nessa região a uma tensão uniforme; devido aos entalhes há concentrações de tensões junto da periferia.

Se fizermos a determinação das tensões principais na secção de área mínima obtêm-se os resultados indicados nos diagramas da fig. 49. Como se vê nesta secção não há nada que se assemelhe com uma tensão uniforme: a tensão longitudinal tem um valor máximo cêrca de 2,13 a tensão média e um valor mínimo cêrca de 0,7 desta tensão. Além disto existe uma tensão transversal Q, necessàriamente nula nos extremos, que aumenta ràpidamente atingindo na região média um valor cêrca de 0,5 a tensão média.

Fig. 48

Nas peças usadas para estes ensaios na Inglaterra e nos Estados Unidos a distribuïção de tensões está indicada na fig. 50; as tensões máxima e mínima afastam-se menos da tensão média.

Mas tanto numa peça como noutra o estado de tensão na secção de área mínima é bastante

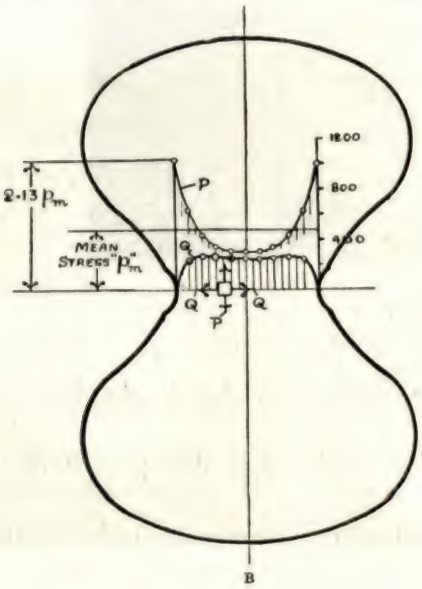


Fig. 49

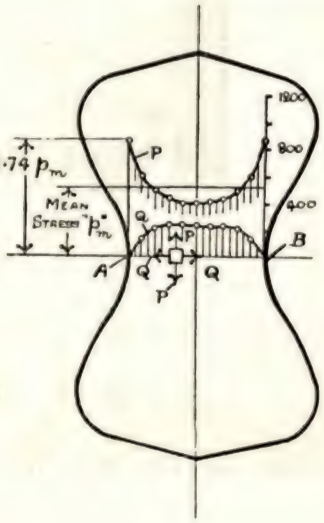


Fig. 50

complexo e portanto dos ensaios feitos com estas peças pouco se poderá concluir àcêrca das propriedades do cimento submetido à tracção.

Há uma observação a fazer: será a mesma a distribuïção das tensões na peça de cimento e na peça de baquelite ensaiada? Ora a experiência mostra que as tensões na peça de cimento com idade suficiente são as mesmas que as fornecidas pelo modêlo transparente, o que era de esperar visto que o cimento é perfeitamente elástico quando velho. As peças moldadas recentemente não são perfeitamente elásticas, devendo por isso as tensões desenvolvidas na secção de área mínima aproximarem-se mais da distribuïção uniforme.

A fig. 51 refere-se a um disco submetido a duas fôrças actuantes nos extremos dum diâmetro. Êste problema é resolvido pela teoria da elasticidade. As tensões desenvolvidas

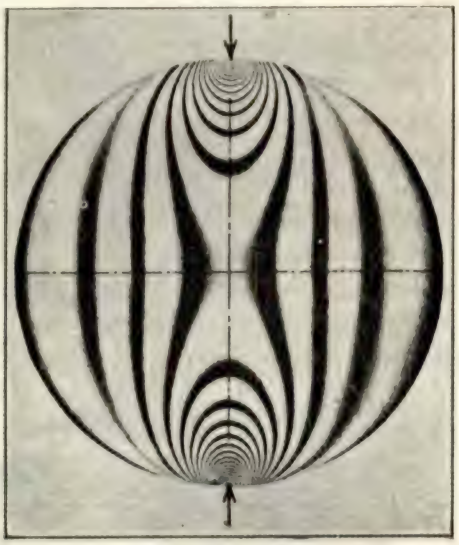


Fig. 51

nesta placa são as que se desenvolvem também na secção transversal dum rôlo duma ponte.

As fig. 52 e 54 referem-se a um rôlo de ponte com a forma indicada, carregado simétrica e assimètricamente; a fig. 53 mostra as linhas de igual diferença das tensões principais na vizinhança do ponto de aplicação duma das fôrças da fig. 52.

Fig. 52 Fig. 53 Fig. 54

10 — Pode também aplicar-se a fotoelasticidade na determinação das tensões desenvolvidas nos corpos em movimento. O registo das isoclínicas e das linhas de igual diferença de tensões principais faz-se pela fotografia rápida e pela cinematografia.

A fig. 55 refere-se a um disco submetido a duas fôrças variáveis.

Têm sido estudadas peças submetidas à acção de ferramentas para se determinar a melhor forma a dar a estas ferramentas. Também se tem feito o estudo da forma mais conveniente dos dentes das serras, de modo que as tensões neles desenvolvidas sejam mínimas.

Nas peças animadas de movimentos periódicos, tais como rotações, vibrações, etc., podem obter-se imagens directamente observáveis, usando o método estroboscópico: ilumina-se a peça com uma luz cuja intensidade tenha o mesmo período ou um período múltiplo do período do movimento a estudar.

Assim no caso dum volante animado de movimento de rotação as tensões desenvolvidas pela fôrça centrífuga originaram as linhas de igual diferença de tensões principais indicadas na fig. 56.

Fig. 55

11 — Têm sido várias as tentativas infrutíferas feitas para generalizar o método de fotoelasticidade à deter- minação das tensões elásticas desenvolvidas nos equilíbrios a três dimensões.

Contudo, recentemente, foi descoberta uma propriedade das resinas sintéticas fenólicas tais como baquelite, trolon, etc., que fez de novo voltar a atenção para a fotoelasticidade para a determinação das tensões nos equilíbrios a três dimensões.

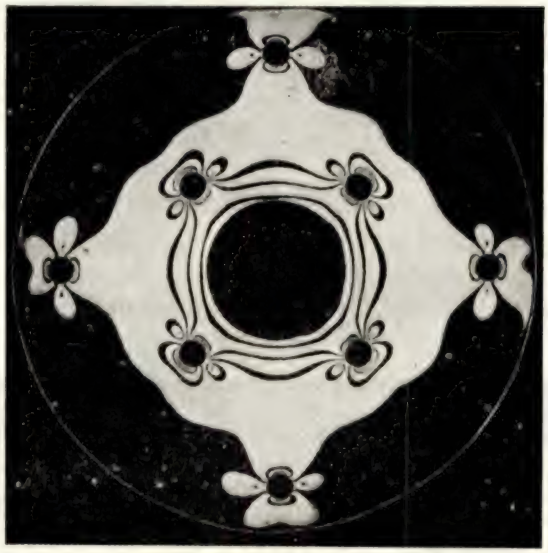


Fig. 56

Aqueçamos um corpo constituído por uma destas resinas até uma certa temperatura T, (para a baquelite T = 110° C), e apliquemos-lhe um sistema de fôrças; cada partícula do corpo torna-se birefringente. Se arrefecermos o corpo até à temperatura ambiente, mantendo as fôrças actuantes, observa-se que a birefringência se mantém inalterável, mesmo depois de retiradas as fôrças.

Produz-se uma fixação da deformação e do conseqüente efeito óptico (fig. 57). Êste fenómeno foi estudado por Hetényi em 1938.

Se cortarmos cuidadosamente o corpo a birefringência não é modificada (fig. 58); portanto pode estudar-se o estado de solicitação elástica a que o corpo estava submetido à temperatura T, observando à temperatura ambiente as propriedades ópticas de particulas tiradas do corpo.

Fig. 57 e Fig. 58

De facto, Hiltscher em 1938 usando métodos cristalográficos e recorrendo às leis gerais da fotoelasticidade conseguiu determinar em cada ponto do corpo as direcções das tensões principais e as diferenças $\sigma_1 - \sigma_2$, $\sigma_1 - \sigma_3$ e $\sigma_2 - \sigma_3$, das suas grandezas.

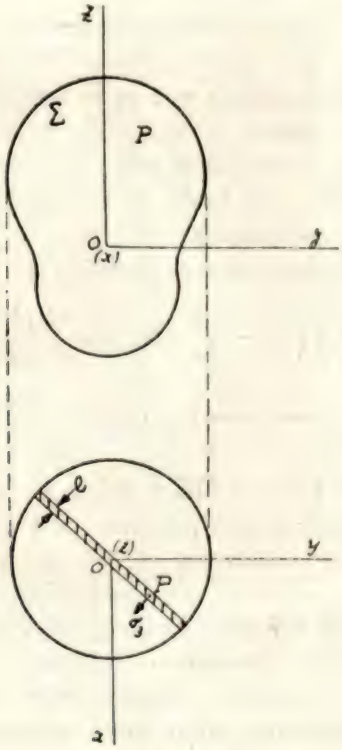


Fig. 59

Não conhecemos nenhum método geral, mesmo sem ser baseado na fotoelasticidade, que permita a determinação das tensões σ_1, σ_2 e σ_3 num ponto qualquer dum sólido em equilíbrio elástico a três dimensões.

No entanto no caso dum corpo Σ (fig. 59) de revolução em tôrno de um eixo OZ e defor-

mado simètricamente em relação a êste eixo, estabelecemos duas equações diferenciais que permitem determinar em qualquer ponto P os valores de σ_1, σ_2 e σ_3 [1].

Suponhamos que à temperatura T foram aplicadas as fôrças ao sólido Σ e que em seguida se baixou a sua temperatura até cêrca de 20° C, mantendo as fôrças aplicadas. Como vimos se se retirarem agora as fôrças a birefringência mantém-se.

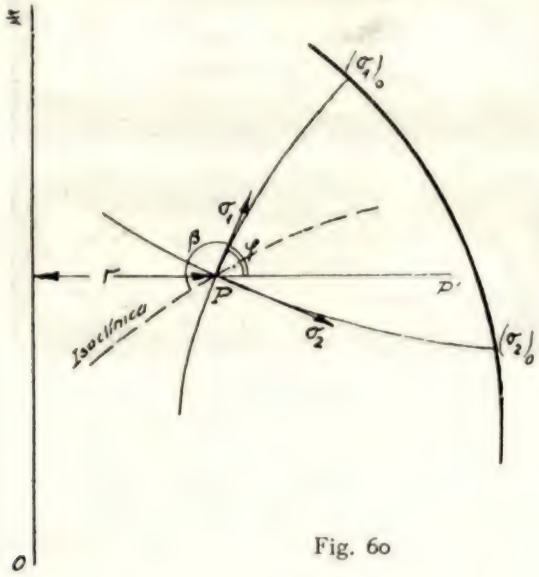


Fig. 60

Do sólido com a birefringência fixada retiremos uma lâmina de pequena espessura, e, passando pelo eixo OZ.

Num ponto P da lâmina extraída sejam σ_1 e σ_2 as tensões principais existentes no plano da lâmina e σ_3 a tensão normal a êste plano.

Seja β o ângulo que a isoclínica que passa por P faz com a direcção da tensão principal σ_1 e φ e ψ respectivamente os ângulos que fazem as direcções das tensões principais σ_1 e σ_2 com a direcção de referência P P' perpendicular a OZ.

Então as tensões σ_1 e σ_2 são dadas pelas expressões:

$$\sigma_1 = \left(\sigma_1\right)_0 + \int_{\psi_0}^{\psi} \left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right) \operatorname{cotg} \beta - \frac{\partial\,(\log r)}{\partial \varphi} \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)\right] d\psi$$

$$\sigma_2 = \left(\sigma_2\right)_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[-\left(\sigma_2 - \sigma_1\right) \operatorname{tg} \beta - \frac{\partial\,(\log r)}{\partial \psi} \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)\right] d\varphi \quad ,$$

onde r representa a distância de P ao eixo OZ e $(\sigma_1)_0$ e $(\sigma_2)_0$ os valores, supostos conhecidos, de σ_1 e σ_2 nos pontos onde as isostáticas que passam por P encontram a superfície do sólido; os integrais são tomados ao longo das isostáticas.

Os valores de β, $\sigma_1 - \sigma_2$, $\sigma_1 - \sigma_3$ e $\sigma_2 - \sigma_3$ determinam-se a partir da observação da placa em luz polarizada (referência 1); as integrações fazem-se gràficamente.

Determinados σ_1 e σ_2, como são conhecidas as diferenças das tensões principais, calcula-se σ_3.

Podem assim determinar-se as tensões principais num ponto qualquer dum cilindro submetido a pressões interiores ou exteriores, dum disco animado de movimento de rotação, dum sólido semi-indefinido submetido a fôrças exercidas por uma esfera, um cilindro, duma placa circular simètricamente carregada, etc.

12 — Cremos ter dado uma ideia do papel importante que a fotoelasticidade pode desempenhar tanto no ensino da engenharia como na resolução de problemas de interêsse técnico.

---

[1] Ver trabalho do autor publicado na «Técnica», Dezembro, 1940.

O CÁLCULO DO BETÃO ARMADO APLICADO AOS EDIFÍCIOS

POR
J. DE CANG
Engenheiro civil
Professor da Universidade do Trabalho de Charleroi

(Continuação do n.º 121)

2.º caso — Três tramos desiguais

a) **Carga uniformemente distribuída.**

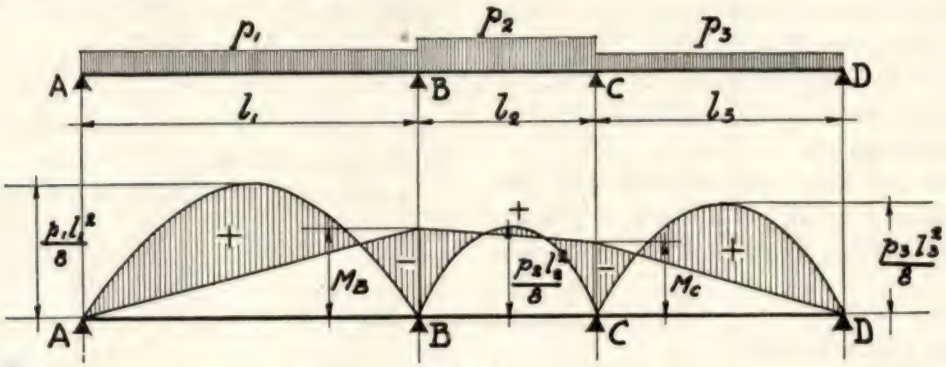


Fig. 61

Os momentos nos apoios B e C são dados pelas equações seguintes:

$$4\,M_B\left(\frac{l_1+l_2}{l_2}\right)+2\,M_C=-\frac{p_1\,l_1^3+p_2\,l_2^3}{2\,l_2}$$

$$-\frac{M_B\,l_2}{l_2+l_3}-2\,M_C=+\frac{p_2\,l_2^3+p_3\,l_3^3}{4\,(l_2+l_3)}$$

Para resolver estas duas equações, basta adicioná-las membro a membro; obtém-se assim uma equação em M_B, visto que se anulam os termos em M_C. Desta equação tira-se o valor de M_B, que substituído numa das duas equações nos dá o valor de M_C.

O diagrama dos momentos flectores é constituído por três parábolas de alturas, $\frac{p_1\,l_1}{8}$ $\frac{p_2\,l_2}{8}$ e $\frac{p_3\,l_3}{8}$ e pela linha de fecho A E F D.

Caso particular: três tramos iguais e cargas unitárias iguais ($l_1=l_2=l_3$ e $p_1=p_2=p_3$).

$$M_B=M_C=-\frac{pl^2}{10}$$

b) **Cargas triangulares** (caso de um lintel de três tramos suportando uma parede cuja altura é igual, pelo menos, a 3/4 do maior vão).

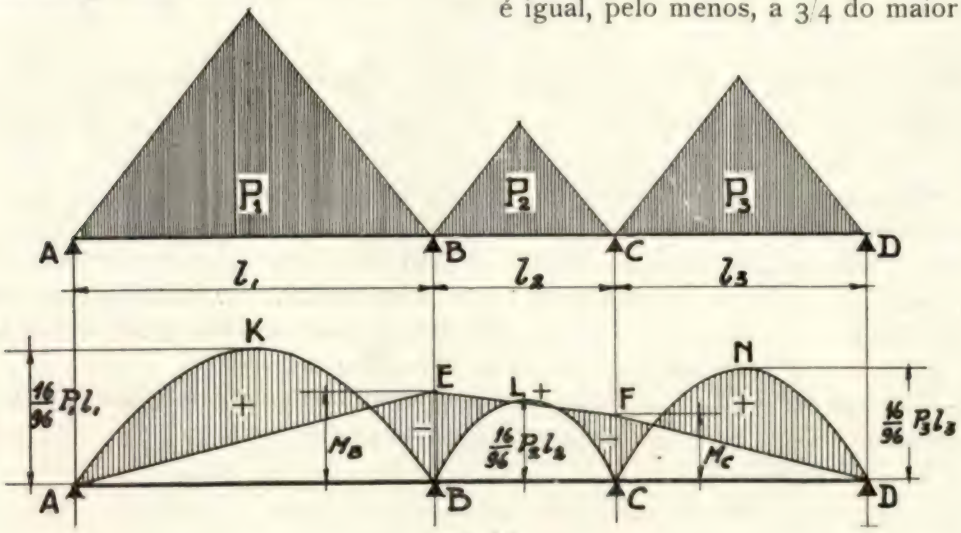


Fig. 62

Os momentos nos apoios B e C são dados pelas equações seguintes:

$$\frac{4M_B\,(l_1+l_2)}{l_2}+2M_C=-\frac{5}{8\,l_2}\,(P_1\,l_1^2+P_2\,l_2^2)$$

$$-\frac{M_B\,l_2}{l_2+l_3}-2M_C=+\frac{5}{16\,(l_2+l_3)}\,(P_2\,l_2^2+P_3\,l_3^3$$

O diagrama dos momentos flectores é formado por três curvas (A K B — B L C e C N D) (fig. 62), e pela linha de fecho A E F D. Os valores das diferentes ordenadas destas curvas são dados pela fig. 58.

No caso de um lintel que suporta uma parede cuja altura é igual, pelo menos, a 3/4 de l_1, as cargas triangulares têm os seguintes valores:

$$P_1=\frac{5}{16}\,pl_1^2$$

$$P_2=\frac{5}{16}\,pl_2^2$$

$$P_3=\frac{5}{16}\,pl_3^2$$

em que p representa o pêso da parede por metro quadrado.

Estas cargas triangulares correspondem a triângulos de alturas respectivamente iguais a

$$\frac{5}{8}\,l_1,\ \frac{5}{8}\,l_2 \text{ e } \frac{5}{8}\,l_3\,.$$

Caso particular: três tramos iguais e cargas triangulares iguais.

O momento nos apoios B e C será:

$$M_B=M_C=-\frac{12}{96}\,Pl$$

c) Cargas concentradas

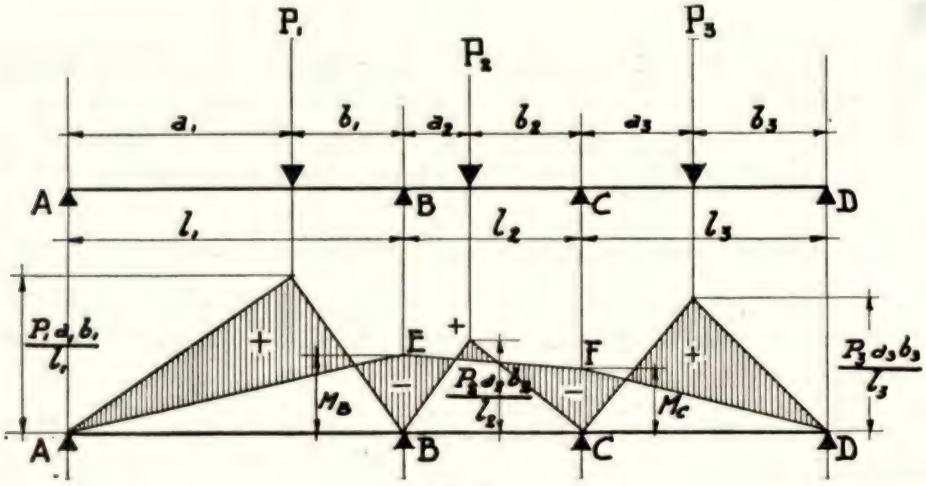


Fig. 63

Os momentos nos apoios B e C são dados pelas duas equações seguintes (fig. 63):

$$\frac{4\,M_B\,(l_2+l_2)}{l_2}+2\,M_C=-\frac{2\,P_1\,a_1}{l_1\,l_2}\,(l_1^2-a_1^2)-$$

$$-\frac{2\,P_2\,b_2}{l_2^2}\,(l_2^2-b_2^2)$$

$$-\frac{M_B\,l_2}{l_2+l_3}-2\,M_C=\frac{P_2\,a_2\,(l_2^2-a_2^2)}{l_2\,(l_2+l_3)}+$$

$$+\frac{P_3\,b_3\,(l_3^2-b_3^2)}{l_3\,(l_2+l_3)}$$

O diagrama dos momentos flectores é formado por três triângulos de alturas $\frac{P_1\,a_1\,b_1}{l_1}$, $\frac{P_2\,a_2\,b_2}{l_2}$ e $\frac{P_3\,a_3\,b_3}{l_3}$ e por uma linha de fecho AEFD.

Caso particular: Três tramos iguais e três cargas concentradas iguais aplicadas no meio de cada tramo.

O momento nas secções dos apoios B e C será:

$$M_B=M_C=-\frac{3\,Pl}{20}$$

d) **Cargas uniformes parciais e simétricas.**

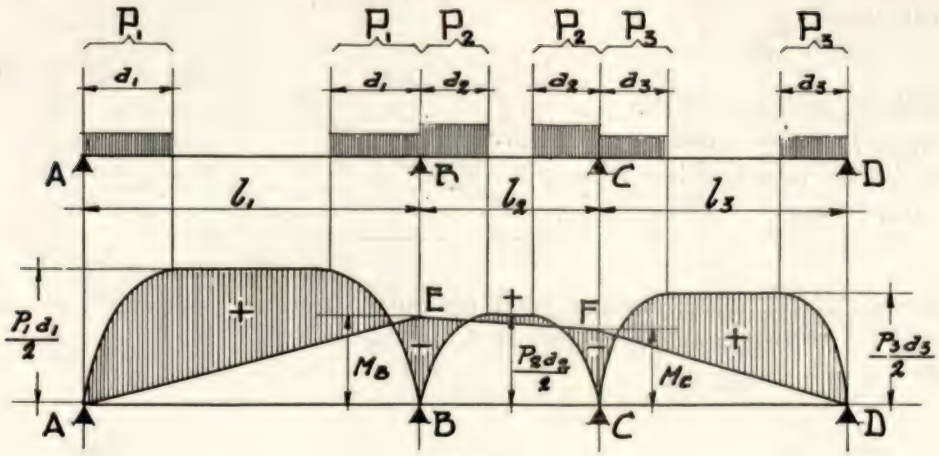


Fig. 64

Os momentos nas secções dos apoios B e C são dados pelas duas equações seguintes (fig. 64):

$$\frac{4\,M_B\,(l_1+l_2)}{l_2}+2\,M_C=-\frac{P_1\,a_1}{l_2}\,(3\,l_1-2\,a_1)-$$

$$-\frac{P_2\,a_2}{l_2}\,(3\,l_2-2\,a_2)$$

$$-\frac{M_B\,l_2}{l_2+l_3}-2\,M_C=+\frac{P_2\,a_2}{2\,(l_2+l_3)}\,(3\,l_2-2\,a_2)+$$

$$+\frac{P_3\,a_3}{2\,(l_2+l_3)}\,(3\,l_3-2\,a_3)$$

em que: $P_1=p_1\,a_1$, $P_2=p_2\,a_2$ e $P_3=p_3\,a_3$

Caso particular: três tramos iguais e cargas iguais ($l_1=l_2=l_3$ e $P_1=P_2=P_3$).

O momento nas secções dos apoios B e C será:

$$M_B=M_C=-\frac{P\,a}{5\,l}\,(3\,l-2\,a)$$

3.° CASO — QUATRO TRAMOS DESIGUAIS

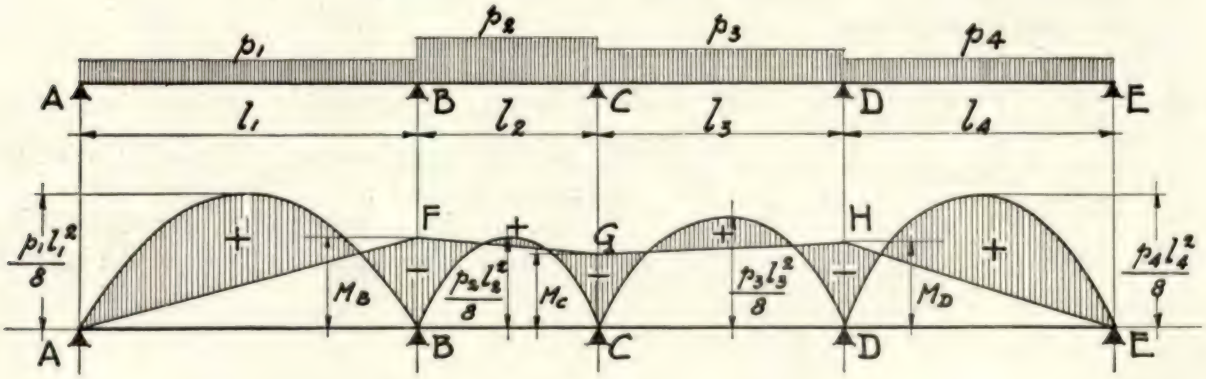


Fig. 65

a) **Carga uniformemente distribuída.**

Os momentos nos apoios B, C e D são dados pelas três equações seguintes (fig. 65):

$$2\,M_B+\frac{M_C\,l_2}{(l_1+l_2)}=-\frac{(p_1\,l_1^3+p_2\,l_2^3)}{4\,(l_1+l_2)}$$

$$-2\,M_B-\frac{4\,M_C\,(l_2+l_3)}{l_2}-\frac{2\,M_D\,l_3}{l_2}=$$

$$=+\frac{(p_2\,l_2^3+p_3\,l_3^3)}{2\,l_2}$$

$$M_C\,l_3+2\,M_D\,(l_3+l_4)=-\frac{p_3\,l_3^3}{4}-\frac{p_4\,l_4^3}{4}$$

O diagrama dos momentos flectores é constituído por quatro parábolas de alturas respec-

tivamente iguais a

$$\frac{p_1 l_1^2}{8}, \quad \frac{p_2 l_2^2}{8}, \quad \frac{p_3 l_3^2}{8} \quad e \quad \frac{p_4 l_4^2}{8}$$

e por uma linha de fecho AFGHE.

Caso particular: Quatro tramos iguais e cargas unitárias iguais ($l_1 = l_2 = l_3 = l_4$ e $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$).

Os momentos nas secções dos apoios B, C e D serão:

$$M_B = M_D = -\frac{3\,p\,l^2}{28}$$

$$M_C = -\frac{p\,l^2}{14}$$

---

b) **Cargas triangulares** (Caso de um lintel de quatro tramos desiguais que suporta uma parede cuja altura é, pelo menos, igual a 3/4 do maior vão).

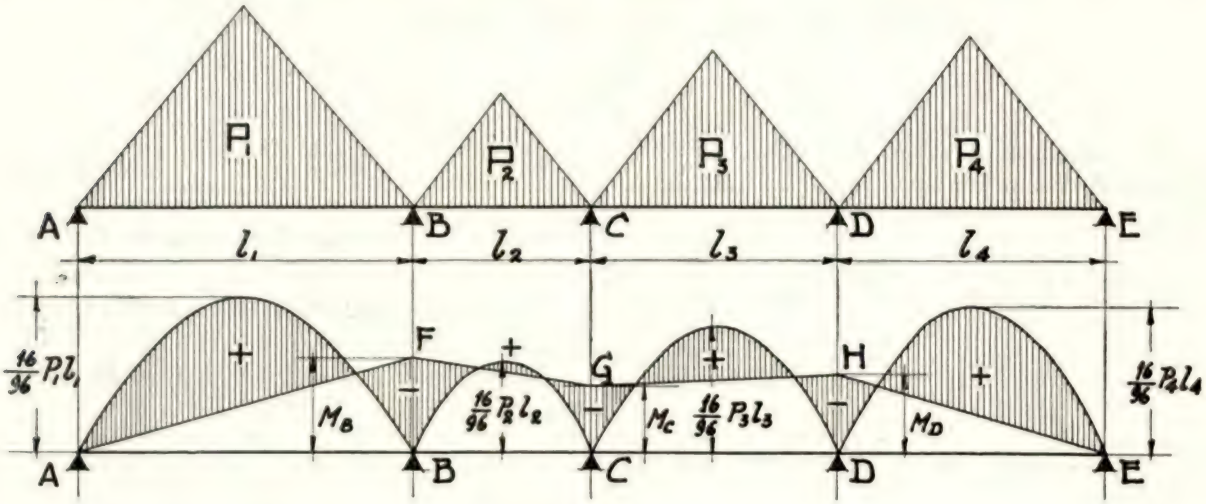


Fig. 66

Os momentos nos apoios B, C e D são dados pelas equações seguintes:

$$2\,M_B + \frac{M_C\,l_2}{(l_1 + l_2)} = -\frac{5}{16\,(l_1 + l_2)}\,(P_1\,l_1^2 + P_2\,l_2^2)$$

$$-2\,M_B - \frac{4\,M_C\,(l_2 + l_3)}{l_2} - \frac{2\,M_D\,l_3}{l_2} =$$

$$= +\frac{5}{8}\,(P_2\,l_2^2 + P_3\,l_3^2)$$

$$M_C\,l_3 + 2\,M_D\,(l_3 + l_4) = -\frac{5}{16}\,(P_3\,l_3^2 + P_4\,l_4^2)$$

O diagrama dos momentos flectores é constituído por quatro curvas e por uma linha de fecho AFGHE. Os valores das diferentes ordenadas destas quatro curvas são dados pela fig. 56.

No caso de um lintel que suporta uma parede cuja altura é igual, pelo menos, a 3/4 do vão maior, as cargas triangulares têm os seguintes valores:

$$P_1 = \frac{5}{16}\,p\,l_1^2; \quad P_2 = \frac{5}{16}\,p\,l_2^2;$$

$$P_3 = \frac{5}{16}\,p\,l_3^2; \quad P_4 = \frac{5}{16}\,p\,l_4^2$$

em que p representa o pêso da parede por metro quadrado.

Estas cargas triangulares correspondem a triângulos de alturas respectivamente iguais a:

$$\frac{5}{8}\,l_1; \quad \frac{5}{8}\,l_2; \quad \frac{5}{8}\,l_3; \quad \frac{5}{8}\,l_4$$

Caso particular: Quatro tramos iguais e cargas triangulares iguais.

Os momentos nas secções dos apoios, B, C e D. serão:

$$M_B = M_D = \frac{12{,}86}{96}\,P\,l$$

$$M_C = \frac{8{,}57}{96}\,P\,l$$

c) Cargas concentradas:

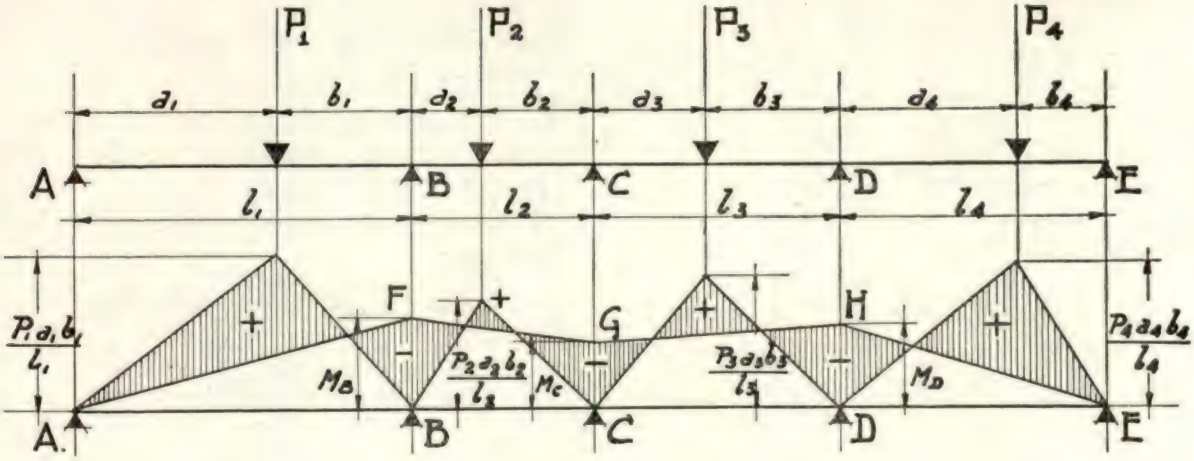


Fig. 67

Os momentos nos apoios B, C e D são dados pelas três equações seguintes:

$$2\,M_B + \frac{M_C\,l_2}{l_1 + l_2} = -\frac{P_1\,a_2}{l_1\,(l_1 + l_2}\,(l_1^2 - a_1^2) - \frac{P_2\,b_2}{l_2\,(l_1 + l_2}\,(l_2^2 - b_2^2)$$

$$-2\,M_B - \frac{4\,M_C\,(l_2 + l_3)}{l_2} - \frac{2\,M_D\,l_3}{l_2} = + \frac{2\,P_2\,a_2}{l_2}\,(l_2^2 - a_2^2) + \frac{2\,P_3\,b_3}{l_2\,l_3}\,(l_3^2 - b_3^2)$$

$$M_C\,l_3 + 2\,M_D\,(l_3 + l_4) = -\frac{P_3\,a_3}{l_3}\,(l_3^2 - a_3^2) - \frac{P_4\,b_4}{l_4}\,(l_4^2 - b_4^2)$$

O diagrama dos momentos flectores é constituído por quatro triângulos de alturas $\frac{P_1\,a_1\,b_1}{l_1}$; $\frac{P_2\,a_2\,b_2}{l_2}$; $\frac{P_3\,a_3\,b_3}{l_3}$ e $\frac{P_4\,a_4\,b_4}{l_4}$ e pela linha de fecho AFGHE.

Caso particular: Quatro tramos iguais e quatros cargas concentradas iguais aplicadas a meio de cada tramo, ($l_1 = l_2 = l_3 = l_4$ e $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$).

Os momentos nas secções dos apoios B, C e D serão:

$$M_B = M_D = -\frac{9}{56}\,P\,l$$

$$M_C = -\frac{3}{28}\,P\,l$$

d) Cargas uniformes parciais e simétricas.

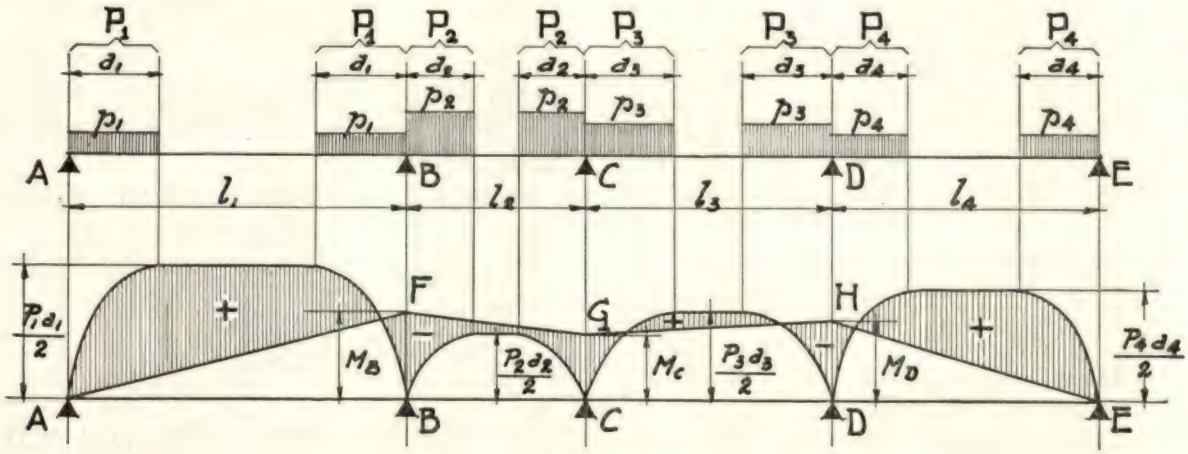


Fig. 68

Os momentos nos apoios B, C e D são dados pelas três equações seguintes:

$$2 M_B + \frac{M_C l_2}{(l_1 + l_2)} = - \frac{P_1 a_1}{2 (l_1 + l_2)} (3 l_1 - 2 a_1) - \frac{P_2 a_2 (3 l_2 - 2 a_2)}{2 (l_1 + l_2)}$$

$$- 2 M_B - \frac{4 M_C (l_2 + l_3)}{l_2} - \frac{2 M_D l_3}{l_2} = + \frac{P_2 a_2}{l_2} (3 l_2 - 2 a_2) + \frac{P_3 a_3}{l_2} (3 l_3 - 2 a_3)$$

$$M_C l_3 + 2 M_D (l_3 + l_4) = - \frac{P_3 a_3}{2} (3 l_3 - 2 a_3) - \frac{P_4 a_4}{2} (3 l_4 - 2 a_4)$$

em que: $P_1 = p_1 a_1$; $P_2 = p_2 a_2$; $P_3 = p_3 a_3$; $P_4 = p_4 a_4$.

Caso particular: Quatro tramos iguais e cargas iguais ($l_1 = l_2 = l_3 = l_4$ e $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$).

Os momentos nas secções dos apoios B, C e D serão:

$$M_B = M_D = - \frac{3 P a}{14 l} (3 l - 2 a)$$

$$M_C = - \frac{P a}{7 l} (3 l - 2 a) \quad .$$

Primeira aplicação numérica — Cálculo de um lintel

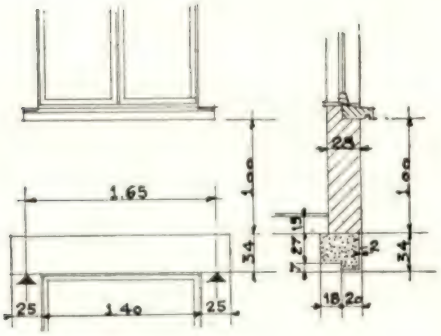


Fig. 69

A fig. 69 representa o lintel que vamos calcular. As suas dimensões são impostas pela arquitectura da construção, vamos portanto determinar as armaduras.

O lintel suporta uma altura de parede inferior a 3/4 do seu vão ($3/4 \times 1{,}6 = 1{,}24$), deverá portanto ser calculado para a totalidade da alvenaria que constitue o pano de peito.

A carga por metro corrente será:

Pano de peito em alvenaria de tejolo macisso ($1{,}00 \times 0{,}28$) $\times$ $\times$ 1.800	500 kg
Pêso próprio ($0{,}18 \times 0{,}28 + 0{,}19 \times$ $\times 0{,}32$) $\times$ 2.500	265 kg
Pavimento incluindo sobrecarga $1/2 \times 3{,}25 \times 275$	465 kg
Total	1.230 kg

Momento flector a meio do vão do lintel:

$$M = + \frac{p l^2}{10}$$

$$= \frac{1230 \times \overline{1{,}65}^2}{10} = 335 \text{ kg}$$

Altura útil ou teórica, mínima, necessária:

$$h = A \sqrt{\frac{335}{0{,}36}}$$

$A = 3{,}45$ para $n = 50$ kg/cm² e $t = 12$ kg/mm². (Tabela I)

Donde:

$$h = 3{,}45 \sqrt{\frac{335}{0{,}36}}$$

$$= 107 \text{ mm.}$$

Ora, a altura útil do lintel é de 270 mm. As dimensões impostas são portanto mais do que suficientes.

Secção das armaduras de flexão:

$$\omega = B \cdot \frac{M}{h}$$

$$= B \frac{335}{270}$$

$B = 95{,}60$ para $n = 50$ kg/cm² e $t = 12$ kg/mm². (Tabela I)

donde:

$$\omega = 95{,}60 \frac{335}{270}$$
$$= 120 \text{ mm}^2$$

Empregaremos 4 varões de diâmetro 10 mm (fig. 70) com uma secção total de 314 mm². Êstes varões serão prolongados de um extremo ao outro do lintel.

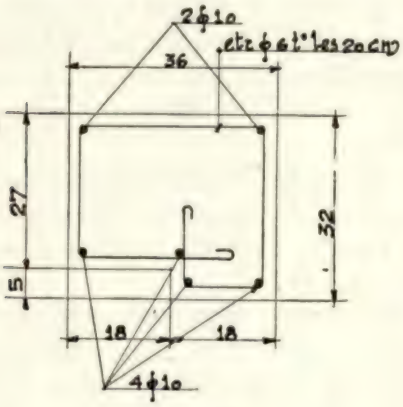


Fig. 70

Momento de encastramento:

$$M = -\frac{p\,l^2}{18}$$

$$= -\frac{1230 \times \overline{1{,}65}^2}{18}$$
$$= -186 \text{ kgms.}$$

Secção das armaduras de encastramento:

$$\omega = B\frac{M}{h}$$
$$= 95{,}60 \frac{186}{270}$$
$$= 70 \text{ mm}^2.$$

Empregaremos 2 varões de diâmetro 10 mm com uma secção total de 157 mm². Prolongaremos igualmente estes varões de um extremo ao outro do lintel, a-fim-de assegurarmos a fixação dos estribos.

Tensão de trabalho do betão ao escorregamento longitudinal (expressão 36):

$$\sigma = \frac{T}{a\,b}$$

$$= \frac{1230 \times \frac{1{,}65}{2}}{36 \times \frac{3}{4} 27} = 1{,}40 \text{ kg/cm}^2 < 4 \text{ kg/cm}^2$$

Teòricamente não são necessários estribos. Empregaremos, no entanto, estribos de 6 mm de diâmetro, espaçados de 20 cm.

Segunda aplicação numérica — Cálculo de um lintel de três tramos desiguais

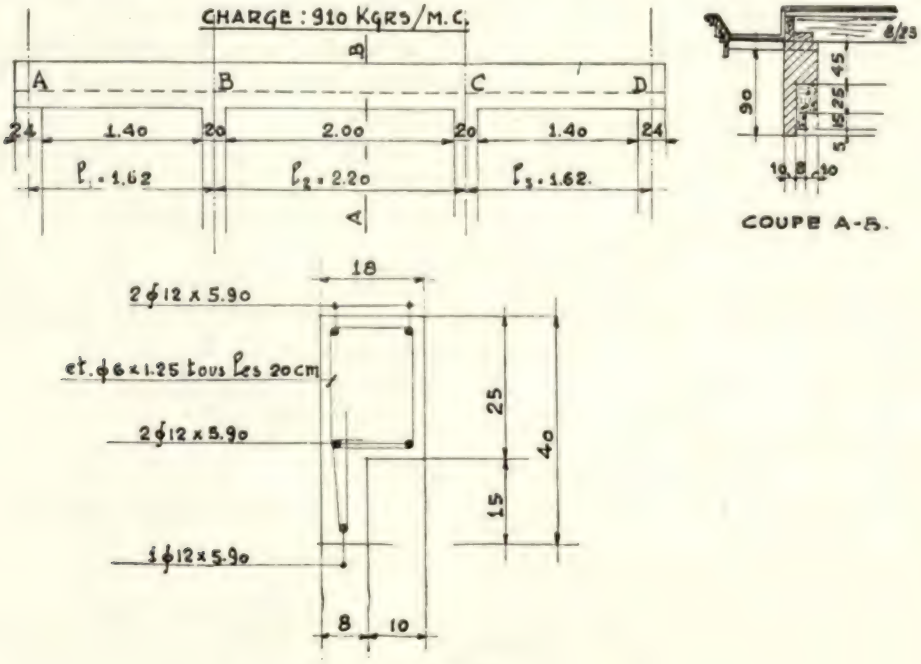


Fig. 71

As dimensões do lintel são as indicadas na fig. 71. Vamos considerar êste lintel como uma viga continua de secção rectangnlar (18×25), e desprezaremos a parte inferior que forma a gola.

A carga que actua sôbre o lintel é de 910 kg por metro linear (incluindo o pêso próprio do lintel).

Os momentos flectores nas secções dos apoios B e C são dados pela equação seguinte:

$$4\,M_B\left(\frac{l_1+l_2}{l_2}\right)+2\,M_C=-\frac{p_1\,l_1^3+p_2\,l_2^3}{2\,l_2}$$

Substituindo os diferentes termos pelos seus valores, virá:

$$4\,M_B\left(\frac{1{,}62+2{,}20}{2{,}20}\right)+2\,M_C=$$

$$=-\frac{910\times\overline{1{,}62}^3+910\times\overline{2{,}20}^3}{2\times 2{,}20}$$

ou:

$$6{,}95\ M_B+2\,M_C=-3.080$$

Ora, $M_B=M_C$

donde:

$$6{,}95\ M_B+2\,M_B=-3.080$$

ou seja:

$$M_B=-\frac{3.080}{8{,}95}$$

$$=-344 \text{ kgms.}$$

Altura útil ou teórica, mínima, necessária:

$$h=A\sqrt{\frac{344}{0{,}18}}$$

$A=3{,}45$ para $n=50$ kg/cm² e $t=12$ kg/mm² (Tabela I).

Donde:

$$h=3{,}45\sqrt{\frac{344}{0{,}18}}$$

$$=152 \text{ mm.}$$

Por conseqüência, a altura útil imposta ou seja 250 mm, é mais do que suficiente.

Secção das armaduras de encastramento nos apoios B e C:

$$\omega=B\,\frac{M}{h}$$

$$=95{,}60\,\frac{344}{(250-30)}$$

$$=95{,}60\,\frac{344}{220}$$

$$=150 \text{ mm}^2.$$

Empregaremos 2 varões de ø 12 mm, com uma secção total de 226 mm² e prolongaremos estas armaduras de um extremo ao outro do lintel, com o fim de assegurarmos a fixação dos estribos.

Estes varões servirão igualmente para resistirem aos possíveis momentos de encastramento que se podem dar nas secções dos apoios extremos A e D.

Para resistir aos momentos positivos colocaremos dois varões de ø 12 mm na parte inferior do lintel. Estes varões serão mais do que suficientes, visto que os momentos positivos são inferiores aos momentos negativos que se verificam nas secções dos apoios B e C (ver fig. 71).

Tensão de escorregamento do betão:

$$\sigma=\frac{T}{a\ b}\qquad\text{(expressão 36)}$$

em que T representa o esfôrço transverso máximo, como sabemos.

Para traçar o diagrama dos esforços transversos teremos que calcular as reacções dos apoios.

Designemos por Y_A, Y_B, Y_C e Y_D as reacções dos apoios A, B, C e D.

Por razões de simetria teremos: $Y_A=Y_D$ e $Y_B=Y_C$.

Para obter a reacção Y_A, bastará escrever a equação de equilíbrio dos momentos, em relação ao apoio B:

$$Y_A\times 1{,}62-\frac{910\times\overline{1{,}62}^2}{2}=M_B=-344 \text{ kg}$$

ou:

$$Y_A\times 1{,}62-1190=-344 \text{ kg}$$

donde:

$$Y_A=\frac{1190-344}{1{,}62}$$

$$=520 \text{ kg}$$

O valor de Y_B obtém-se escrevendo uma equação de projecção sôbre um eixo vertical de tôdas as fôrças exteriores (carga uniforme e reacções dos apoios):

$$2\,Y_A + 2\,Y_B = 910\,(1{,}62 + 2{,}20 + 1{,}62)$$

ou:

$$2 \times 520 + 2\,Y_B = 4.950$$

donde:

$$Y_B = \frac{4.950 - 2 \times 520}{2}$$

$$= 1955 \text{ kg}$$

Podemos portanto traçar o diagrama dos esforços transversos (fig. 72).

Examinando esta figura, verifica-se que o esfôrço transverso máximo se produz à direita do apoio B e tem o valor de 1000 kg.

Substituindo T por êste valor na expressão que nos dá a tensão de escorregamento, teremos:

$$\sigma = \frac{1000}{18 \times 18{,}7} \qquad (18{,}7 = 3/4 \times 25)$$

$$= \frac{1000}{336}$$

$$= 3 \text{ kg/cm}^2 \,.\, < 4 \text{ kg/cm}^2.$$

Não são portanto necessários estribos. Empregaremos no entanto, estribos de ø 6 mm espaçados de 20 cm.

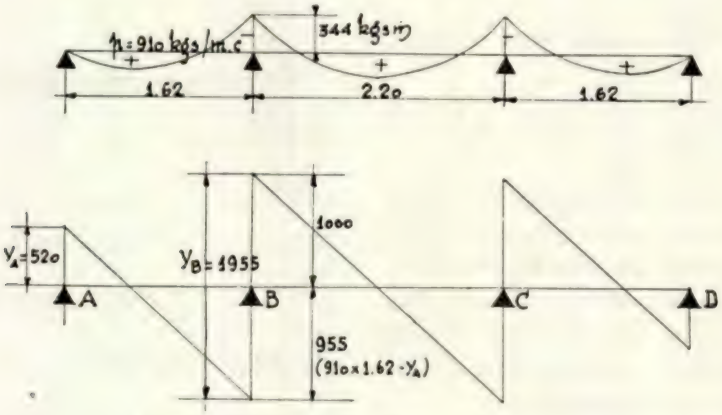


Fig. 72

2 — Varandas e Corpos salientes[1]

A — Varandas

As varandas são geralmente constituídas por simples lages de betão armado encastradas nas paredes. O encastramento não se produz senão nas extremidades da lage, uma vez que existe a abertura correspondente à porta de acesso.

Consideremos o caso representado na fig. 73. A parte central b da lage deve ser considerada como apoiada em duas consolas de largura a. Designemos por p o pêso próprio da varanda, por metro quadrado, adicionado à sobrecarga. Calcularemos a lage tomando como momento a meio $+\frac{p\,b^2}{10}$ e como momento de encastramento $-\frac{p\,b^2}{20}$.

(1) Foi adoptada a designação «corpos salientes» para a tradução de «Loggia», que não tem equivalente em português como elemento duma construção. (N. T.)

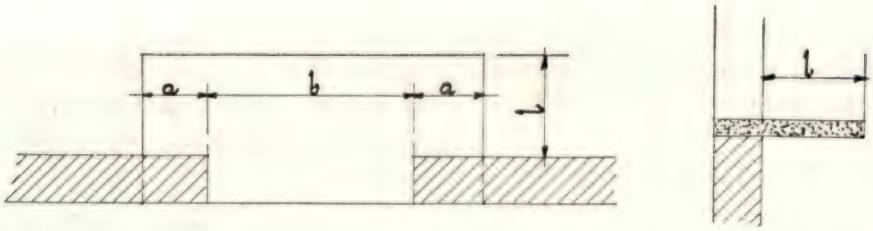


Fig. 73

A altura útil da lage e a secção das armaduras determinam-se pelas expressões (16) e (17) relativas às vigas de secção rectangular.

As consolas deverão ser calculadas para uma carga uniformemente distribuída e igual a:

$$p\left(\frac{b}{2}+a\right)l$$

O momento de encastramento será igual a:

$$-\frac{p\left(\frac{b}{2}+a\right)l^2}{2}$$

A altura das consolas na secção de encastramento bem como as secções das armaduras, determinam-se com auxílio das expressões relativas às vigas de secção rectangular. Na prática dá-se à lage e às consolas a mesma espessura. É geralmente o cálculo destas últimas, que fixa a espessura a adoptar.

Podemos igualmente calcular a lage como encastrada em todo o seu comprimento, em lugar de a considerar como encastrada nas suas extremidades; mas neste caso, torna-se necessário prever uma viga que constitue por assim dizer um lintel (fig. 74), com a resistência suficiente para equilibrar as reacções verticais e os momentos de torsão provenientes da parte em consola.

Teremos ocasião de nos ocuparmos dêste assunto quando tratarmos dos corpos salientes.

Fig. 74

Sucede por vez es, quea lage da varanda não é mais do que o prolongamento da lage que constitue o pavimento da dependência vizinha (fig. 75).

Neste caso, o lintel já não está sujeito à torsão e pode ser calculado como uma viga em T solicitada ùnicamente por cargas verticais.

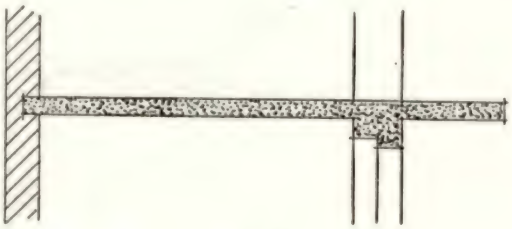


Fig. 75

Exemplo numérico

Pede-se para calcular os elementos de uma lage para uma varanda, com três metros de comprimento e tendo uma saliência de $0,^{m}90$ (fig. 76). O vão de acesso mede $1^{m},80$ de largura. A tensão de compressão admitida para o betão é de 50 kg/cm² e a tensão de tracção para as armaduras é de 12 kg/mm².

Pêso próprio da lage 0,12 × 2500	300 kg m²
Revestimento	30 kg m²
Sobrecarga [1]	500 kg m²
Total	840 kg/m²

Vamos calcular primeiro as duas consolas com $0^{m},60$ de largura, situadas nas duas extremidades da lage. A carga total em cada uma destas consolas é igual a:

$$\frac{3 \times 0,90 \times 840}{2} = 1130 \text{ kg}$$

[1] Art. 13.º do R. B. A. (Balcões de casas de habitação). (N. T.)

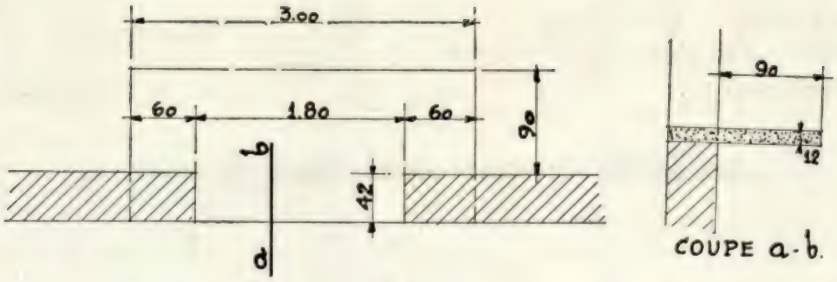


Fig. 76

Momento de encastramento das consolas:

$$M = -1130 \times \frac{0{,}90}{2}$$

$$= -510 \text{ kg}$$

Altura útil ou teórica das consolas:

$$h = A\sqrt{\frac{510}{0{,}60}}$$

$A = 3{,}45$ para $n = 50$ kg/cm² e para $t = 12$ kg/mm² (Tabela I)

donde:

$$h = 3{,}45\sqrt{\frac{510}{0{,}60}} = 100 \text{ mm}$$

Secção das armaduras de encastramento:

$$\omega = B\,\frac{510}{100}$$

$B = 95{,}60$ para $n = 50$ kg/cm² e $t = 12$ kg/mm² (Tabela I)

donde:

$$\omega = 95{,}60\,\frac{510}{100}$$

$$= 587 \text{ mm}^2$$

Empregaremos 6 varões de ø 12 mm, com uma secção total de 680 mm². Com o fim de evitar que estas armaduras desçam durante a betonagem, voltaremos as suas extremidades para baixo, de maneira a que se apoiem na cofragem.

Espessura total da lage:

$$100 + \underbrace{6}_{\text{raio dos varões}} + \underbrace{14}_{\text{recobrimento}} = 120 \text{ mm}$$

Vamos agora calcular a parte da lage compreendida entre as duas consolas.

O momento flector é máximo a meio da lage e tem o seguinte valor:

$$M = +\frac{840 \times \overline{1{,}80}^2}{10}$$

$$= +272 \text{ kg}$$

Altura útil ou teórica da laje:

$$e = 3{,}45 \times \sqrt{272}$$

$$= 58 \text{ mm.}$$

A altura total de 120 mm que tínhamos determinado para as consolas pode portanto ser adoptada para a parte central da lage.

Secção das armaduras de flexão:

$$\omega = 95{,}60\,\frac{272}{(120 - \underbrace{15}_{\text{recobrimento}} - \underbrace{4}_{\text{raio dos varões}})}$$

$$= 260 \text{ mm}^2$$

Empregaremos 6 varões de ø 8 mm, por metro linear, com uma secção total de 300 mm².

O momento de encastramento da laje, na secção que passa pela aresta das consolas, é igual a:

$$M = -\frac{840 \times \overline{1{,}80}^2}{20}$$

$$= -136 \text{ kg}$$

Secção das armaduras de encastramento:

$$\omega = 95{,}60\,\frac{136}{(120 - 15 - 12 - 3)}$$

$$= 140 \text{ mm.}$$

Empregaremos 6 varões de ø 6 mm, por metro, com uma secção total de 170 mm².

Estes varões serão prolongados de um extremo ao outro da lage, com o fim de servirem como varões de distribuïção para os varões de encastramento das consolas. A dis-

posição das armaduras é a indicada na fig. 77.

Resta-nos verificar a estabilidade da varanda e o trabalho nas alvenarias.

$$M_E = 6220 \times \frac{0,42}{2}$$
$$= 1300 \text{ kgs.}$$

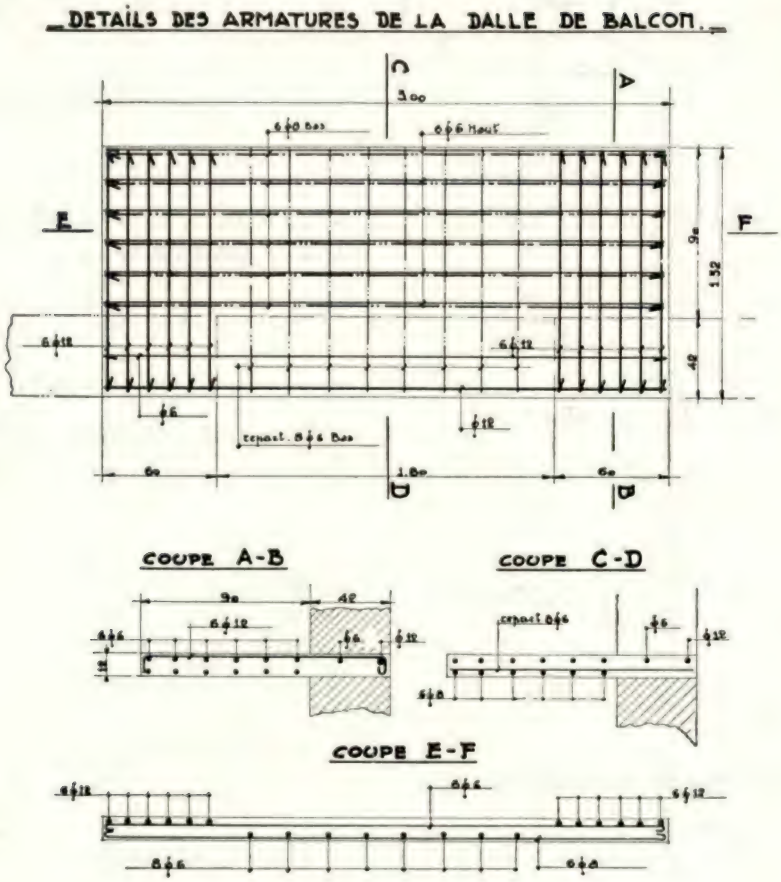


Fig. 77

Verificação da estabilidade:

Admitiremos 1,25 como o valor mínimo do coeficiente de estabilidade.

O pêso da parede (6 m de altura), sôbre as duas partes encastradas da lage, é igual a:

$2\ (0,60 \times 0,42) \times 6 \times 1800 =$	5440 kgs
Parte da lage encastrada na parede:	
$3 \times 0,43 \times 300 =$	380 kgs
Carga transmitida pelo pavimento que se apoia na lage.....	400 kgs
Total.....	6220 kgs

Se admitirmos, para simplificar, que tôdas as cargas são aplicadas segundo o eixo da parede teremos como momento de estabilidade:

Ora o momento de derrubamento é igual a:

$$M_D = (3 \times 0,90 \times 820)\ \frac{0,90}{2}$$
$$= 1020 \text{ kgs.}$$

Coeficiente de estabilidade:

$$\frac{M_E}{M_D} = \frac{1300}{1020}$$
$$= 1,27 > 1,25$$

A varanda é por conseqüência estável.

O coeficiente da estabilidade é na realidade muito superior a 1,27 pois só tomámos em linha de conta a alvenaria que actua directamente sôbre a lage. A aderência das alvenarias vizinhas tem por efeito aumentar sensivelmente o momento de estabilidade. É por esta razão, que admitimos um coeficiente de estabilidade (1,25) bastante pequeno.

Observação:

Se a lage não fôsse estável, tornava-se necessário prever uma viga — lintel (fig. 78) que se prolongasse por sob as paredes, de modo a interessar no cálculo do momento de estabilidade uma maior superfície de alvenaria (a).

Esta viga deveria ser suficientemente resistente para equilibrar as cargas verticais transmitidas pela lage bem como o binário de torsão.

Êste momento deve ser equiliqrado pelo momento das fôrças interiores. Podemos, portanto, escrever:

$$M = 1340 = T \times 0{,}14$$

donde:

$$T = \frac{1340}{0{,}14} = 9570 \text{ kgs.}$$

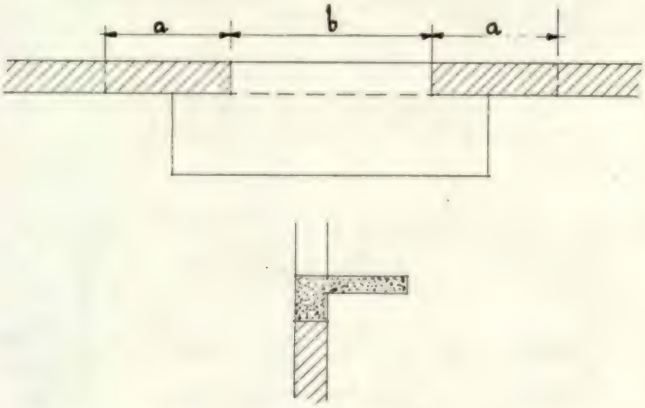


Fig. 78

Verificação do trabalho máximo nas alvenarias:

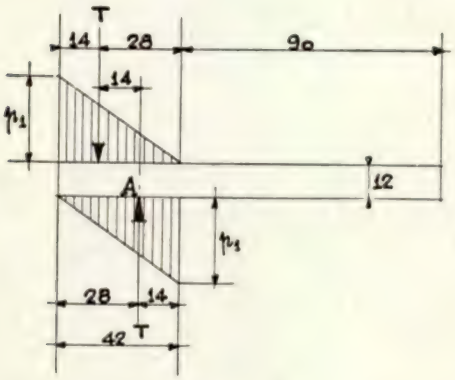


Fig. 79

Admitiremos que o diagrama das pressões sôbre a alvenaria é um triângulo (fig. 79).

Consideremos o momento das fôrças exteriores em relação ao ponto A:

$$M = (3 \times 0{,}90 \times 840) \left(\frac{0{,}90}{2} + 0{,}14\right)$$
$$= 2.270 \times 59$$
$$= 1.340 \text{ kgms.}$$

Superfície de encastramento da lage:

$$2\,(60 \times 42) = 5040 \text{ cm}^2 .$$

Pressão máxima sôbre a alvenaria:

$$p_1 = \frac{9570}{5040} \times 2 = 3{,}80 \text{ kg/cm}^2$$

Deveremos juntar a esta pressão a proveniente das cargas verticais (varanda e alvenaria):

$$p_2 = \frac{2270 + 5440}{5040} = 1{,}33 \text{ kg/cm}^2$$

Pressão total sôbre a alvenaria:

$$p_1 + p_2 = 3{,}80 + 1{,}33 = 5{,}13 \text{ kg/cm}^2 \text{ (1)}$$

(1) Para alvenarias normais adopta-se, geralmente, T=10 kg/cm² (Ver Tabelas do prof. V. Ferreira). (N. T).

B — Corpos salientes

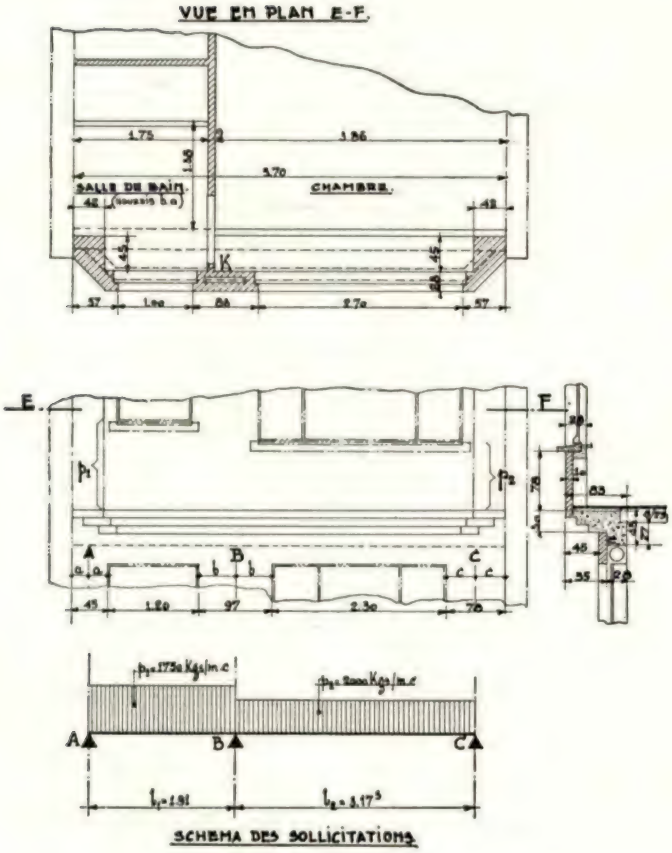


Fig. 80

Consideremos o corpo saliente representado na figura 80. A viga que o suporta serve também de lintel aos dois vãos inferiores. Esta viga apoia-se nos nembos A, B e C e deve ser calculada como uma viga contínua de dois tramos desiguais.

O tramo AB recebe uma carga $p_1 = 1750$ kgs por metro linear, assim descriminada:

Pano de peito	190 kgs
Lage, sala de banho	325 kgs
Viga	615 kgs
Pavimento e sobrecarga sobre a viga .	165 kgs
Peitoril e viga sob o peitoril	200 kgs
Radiador e caixilho	185 kgs
Revestimento exterior e interior . . .	70 kgs
Total	1750 kgs/m. l.

O tramo BC recebe uma carga $p_2 = 2000$ kgs por metro corrente, assim distribuída:

Pano de peito	140 kgs
Pavimento incluindo sobrecarga . . .	685 kgs
Viga	615 kgs
Sobrecarga sobre a viga	90 kgs
Peitoril e viga sob o peitoril	200 kgs
Radiador e caixilho	210 kgs
Revestimento exterior e interior . . .	60 kgs
Total	2000 kgs/m. l.

A secção transversal da viga é a indicada na fig. 81.

Vamos primeiro calcular a parte R S T da secção, que trabalha em consola sôbre a viga. A parte mais carregada desta consola está situada sob o nembo K (fig. 80). A carga transmitida pelo nembo K (alvenaria, teto, caixilho,

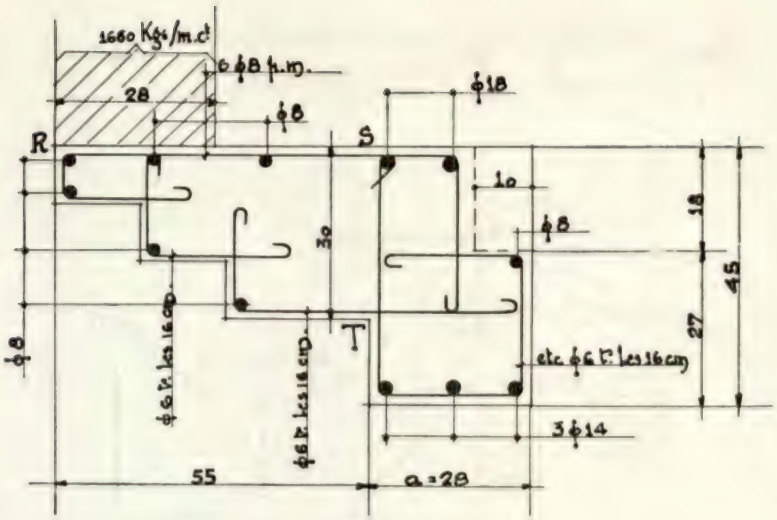


Fig. 81

porta) atinge 1660 kgs por metro corrente. O pêso da parte em consola é de 320 kgs por metro linear.

O momento flector na secção S T (por metro de comprimento), será:

$$M = 1660\left(0{,}55 - \frac{0{,}28}{2}\right) + 320 \times \frac{0{,}55}{2}$$

$$= 770 \text{ kgms.}$$

A altura útil, minima, na secção de encastramento S T será:

$$h = A\sqrt{770}$$

O coeficiente A será igual a 3,45 para

$$n = 50 \quad e \quad t = 12 \text{ (Tabela I)}$$

donde:

$$h = 3{,}45\sqrt{770} = 96{,}60 \text{ mm}$$

altura esta muito inferior à altura total adoptada que foi de 300 mm.

Secção das armaduras de encastramento:

$$\omega = B\,\frac{770}{(300 - 30)}$$

Ora,

$$B = 95{,}60 \text{ (Tabela I)}$$

donde:

$$\omega = 95{,}60\,\frac{770}{270} = 273 \text{ mm}^2$$

Empregaremos 6 ø de 8 mm por metro corrente, com uma secção total de 300 mm² (¹).

Estes varões devem ser colocados na parte superior da consola e a sua ligação à viga deve ser perfeitamente assegurada.

É por esta razão, que fazemos passar estas armaduras em volta dos varões de ø 18 mm e que as prolongamos até ao centro da viga.

Cálculo das armaduras longitudinais

Vamos calcular estas armaduras como se a viga tivesse uma largura uniforme e igual a $0^m{,}28$.

O momento flector máximo dá-se na secção que passa pelo apoio B (fig. 82):

$$M_B = -\frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8\,(l_1 + l_2)}$$

$$= -\frac{1750 \times 1{,}91^3 + 2000 \times 3{,}17^3}{8\,(1{,}91 + 3{,}17)}$$

$$= -1870 \text{ kgms}$$

A altura útil, minima, é dada pela expressão (16):

$$h = A\sqrt{\frac{1870}{0{,}28}}$$

em que $A = 3{,}45$ para $n = 50$ e $t = 12$ donde:

$$h = 3{,}45\sqrt{\frac{1870}{0{,}28}} = 283 \text{ mm.}$$

(¹) O art. 29.º do R. B. A. indica que o intervalo entre os varões da armadura principal não deve ser superior a uma vez e meia a espessura da lage com um máximo de de 15 cm. (N. T.)

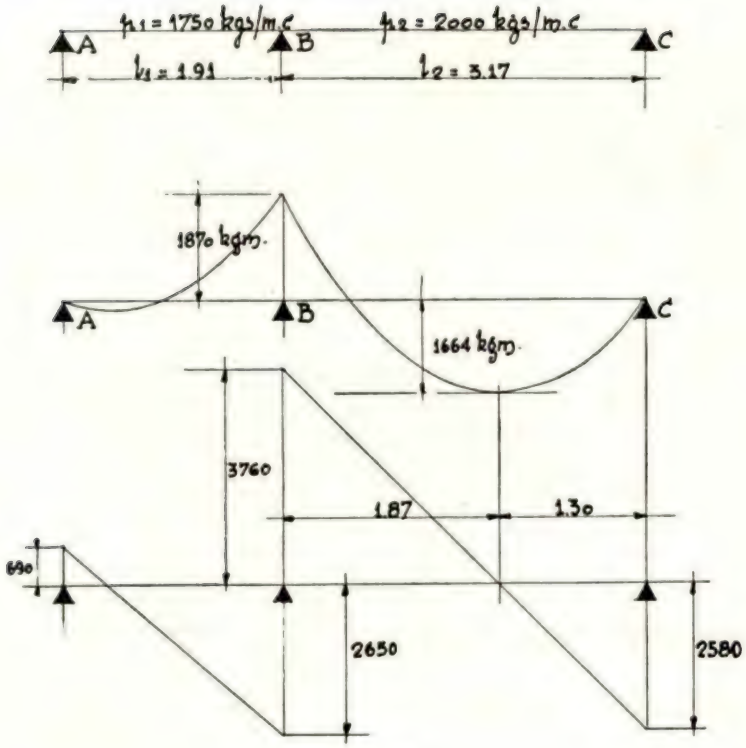


Fig. 82

Ora, a viga tem 450 mm como altura total. Secção das armaduras de encastramento:

$$\omega = B\frac{1870}{(450-30)}$$
$$= 9560\frac{1870}{420}$$
$$= 425 \text{ mm}^2.$$

Empregaremos 2 varões de ø 18 mm, com uma secção de 509 mm², que serão prolongados de um extremo ao outro da viga com o fim de assegurarem a fixação dos estribos e das armaduras da consola.

O momento positivo máximo terá lugar na secção onde o esfôrço transverso fôr nulo, isto é, na secção que dista 1,87 do apoio B (fig. 82):

$$+ M_{max} = 2580 \times 1{,}30 - \frac{2000 \times 1{,}30^2}{2}$$
$$= + 1664 \text{ kg.}$$

Secção das armaduras de flexão:

$$\omega = 95{,}60\frac{1664}{(450-30)}$$
$$= 380 \text{ mm}^2.$$

Empregaremos 3 varões de ø 14 mm, com uma secção total de 462 mm², que serão prolongados de um extremo ao outro da viga com o fim de aesegurarem a fixação dos estribos.

Verificação da resistência ao esfôrço transverso

O esfôrço transverso máximo dá-se na secção do apoio B (fig. 82).

A tensão de escorregamento é dada pela expressão (36):

$$\sigma = \frac{T}{a\,b}$$
$$= \frac{3760}{28\,(0{,}75 \times 45)}$$
$$= 4 \text{ kg/cm}^2.$$

Como esta tensão é igual ao limite fixado pelo artigo 23.º do R. B. A., não se tornam necessários estribos. Colocaremos no entanto alguns estribos de ø 6 mm, espaçados de 16 mm, de maneira a assegurar a ligação entre os diferentes elementos da viga.

Verificação da estabilidade da viga

A viga poderá ter tendência a virar sob a acção das cargas excêntricas. Admitiremos que a aresta em tôrno da qual se produziria êste movimento coïncide com a face exterior da parede de fachada N (fig. 84).

As cargas que actuam sôbre a viga podem dividir-se em dois grupos, as que actuam à

direita da aresta N e as que são aplicadas à sua esquerda.

Para que a viga seja estável, torna-se necessário que a soma dos momentos das fôrças aplicadas à direita da aresta N seja superior à soma dos momentos das fôrças que actuam á esquerda de N:

Cargas aplicadas à direita de N:

Viga (parte à direita de N)	2200 kgs
Pavimento (sem sobrecarga)	720 kgs
Lage da sala de banhos (em sobrecarga)	370 kgs
Nembos de alvenaria (situados nas extremidades)	17700 kgs
Divisória	1800 kgs
Total	22790 kgs

Momento de estabilidade:

$$M_E = 2200 \times \frac{0{,}38}{2} + (720 + 370 + 1800)$$

$$(0{,}38 - 0{,}5) + 17.700 \times \frac{0{,}28}{2} = 3850 \text{ kgs.}$$

Cargas aplicadas à esquerda de N:

Viga (parte à esquerda de N)	1180 kgs
Panos de peito	570 kgs
Revestimentos	285 kgs
Peitorais e vigas sob os peitorais . .	820 kgs
Caixilhos	100 kgs
Nembo central	1210 kgs
Nembos de alvenaria (situados nas extremidades do corpo saliente) .	1260 kgs
Radiadores e diversos	150 kgs
Total	5575 kgs

Momento de derrubamento:

$$M_D = (1180 + 160)\frac{0{,}45}{2} +$$

$$+ (570 + 125 + 820 + 100)\ 0{,}40 +$$

$$+ (1150 + 60)\ 0{,}40 + 1260 \times \frac{0{,}45}{2} +$$

$$+ 150 \times 0{,}20 = 1750 \text{ kgs.}$$

Coeficiente de estabilidade:

$$\frac{M_E}{M_D} = \frac{3850}{1750} = 2{,}20 > 1{,}25$$

Êste coeficiente é na realidade maior, porque não entrámos em linha de conta com a aderência dos nembos extremos às paredes vizinhas, nem com a reacção da lage da sala de banho.

Se o coeficiente de segurança ao derrubamento fôsse inferior a 1,25, seria necessário aumentá-lo, prolongando a viga sob as paredes vizinhas.

Vamos supor, para fixarmos ideias, que prolongamos a viga de um comprimento igual a (0,60 + 0,38), (fig. 83).

O pêso de alvenaria que actua directamente sôbre esta parte da viga é igual a:

$$(0{,}60 + 0{,}38) \times 0{,}16 \times 6{,}50 \times 1800 \times 2 = 3760 \text{ kgs.}$$

O momento de estabilidade suplementar será então:

$$M'_E = 3760 \times \left(\frac{0{,}60 + 0{,}38}{2}\right) = 1840 \text{ kgs.}$$

Verificação da resistência à torsão.

A viga que estamos considerando poderá ter tendência a fracturar-se por torsão. A tensão de tracção, devida à torsão, é dada por uma expressão análoga à da flexão simples:

$$\tau = \frac{M_O\ r}{I_O}$$

na qual:

M_O — representa o binário de torsão.
I_O — representa o momento de inércia polar.
r — representa a distância do centro de gravidade.

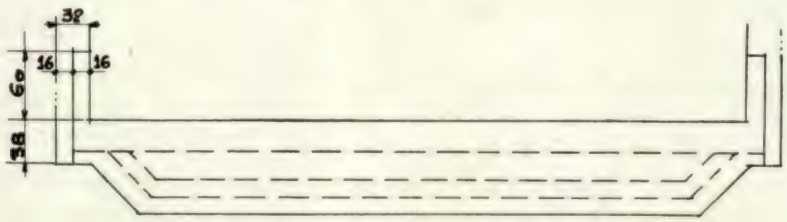


Fig. 83

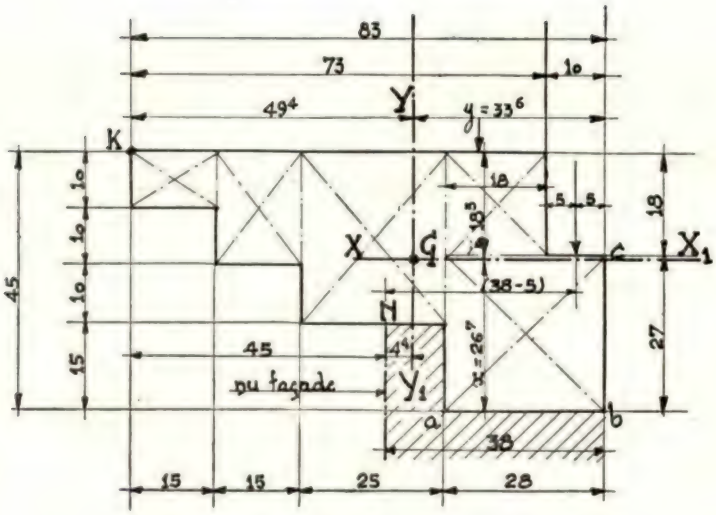


Fig. 84

Para se calcular o momento de inércia polar é necessário conhecer a posição do centro de gravidade G da secção (fig. 84). Para isso, vamos determinar o momento estático da secção em relação à aresta inferior a b :

$$\frac{28 \times 27^2}{2} + 18 \times 18\ (27 + 9) + 25 \times 30 \times 30 + 15 \times 20 \times 35 + 15 \times 10 \times 40 =$$

$$= x\ (27 \times 28 + 18 \times 18 + 25 \times 30 + 15 \times 20 + 15 \times 10)$$

ou :

$$60.870 = 2.280\ x$$

donde :

$$x = \frac{60.870}{2.280} = 26{,}7 \text{ cm.}$$

Determinemos agora o momento estático da secção em relação à aresta vertical b c :

$$\frac{27 \times 28^2}{2} + 18^2\ (10 + 9) + 25 \times 30 \times 40{,}5 + 15 \times 20 \times 60{,}5 + 15 \times 10 \times 75{,}5 = 2.280\ y$$

ou :

$$76.590 = 2.280\ y$$

donde :

$$y = \frac{76.590}{2.280} = 33{,}60 \text{ cm.}$$

O ponto de intersecção do eixo $X X_1$ com o eixo $Y Y_1$ dá-nos a posição do centro de gravidade da secção.

Podemos agora calcular o momento de inércia polar, isto é, o momento de inércia da secção em relação ao ponto G. Êste momento de inércia, obtém-se adicionando os momentos de inércia da secção em relação aos eixos rectangulares $X X_1$ e $Y Y_1$:

$$I_o = I_x + I_y$$

$$I_x = \frac{28 \times \overline{26{,}7}^3}{3} + \frac{26 \times \overline{11{,}7}^3}{3} + \frac{73 \times \overline{18{,}3}^3}{3} - \frac{15 \times \overline{8{,}3}^3}{3} = 337.260 \text{ cm}^4.$$

$$I_y = \frac{10 \times \overline{49{,}4}^3}{3} + \frac{10 \times \overline{34{,}4}^3}{3} + \frac{10 \times \overline{19{,}4}^3}{3} \times \frac{18 \times \overline{23{,}6}^3}{3} + \frac{27 \times \overline{33{,}6}^3}{3} - \frac{15 \times \overline{5{,}6}^3}{3} = 981.190 \text{ cm}^4.$$

donde :

$$I_o = 337.260 + 981.190 = 1.318.450 \text{ cm}^4.$$

A distância do centro de gravidade ao ponto K (aresta mais afastada), será igual a :

$$r = \sqrt{\overline{49{,}40}^2 + \overline{18{,}30}^2} = 52{,}70 \text{ cm.}$$

Quanto ao binário de torsão, êste é igual ao momento de derrubamento, ou seja 1750 kg. Deveremos no entanto tomar apenas metade dêste valor, pois o binário de torsão é absorvido pelas duas extremidades da viga.

Poderemos portanto escrever :

$$\tau = \frac{\frac{175.000}{2} \times 52{,}70}{1.318.450} = 3{,}5 \text{ kg/cm}^2.$$

Como esta fadiga é inferior a 4 kg/cm² (limite admitido para a tensão de escorregamento) o betão resiste por si próprio às ten-

DETAILS DES ARMATURES DE LA POUTRE DE LA LOGGIA. ECH : 1/10 ET 1/20.

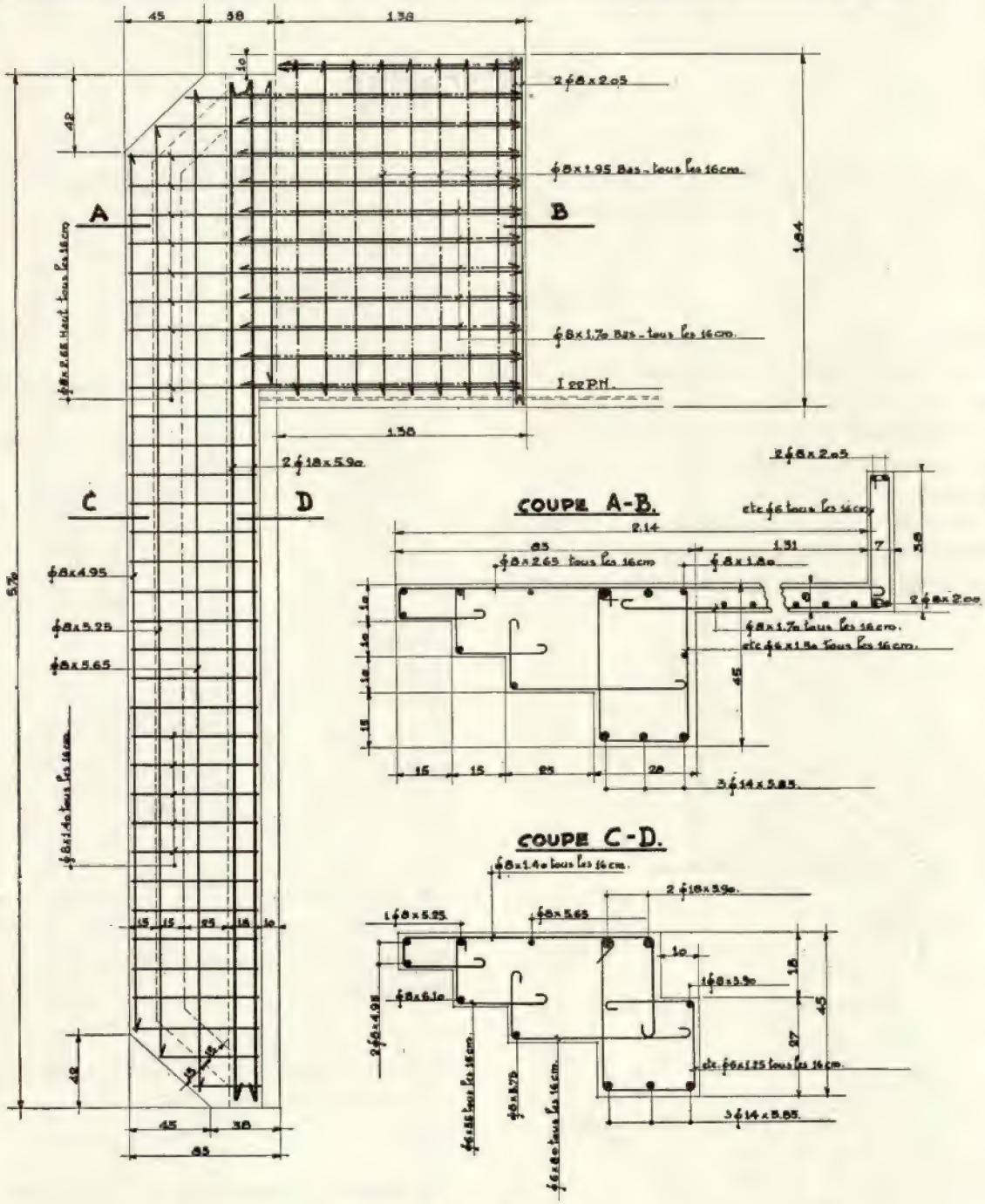


Fig. 85

sões de tracção devidas à torsão. Se êste limite fôsse ultrapassado, tornava-se necessário prever cintas helicoidais (Vidé por exemplo a obra do prof. G. Magnel) [1]. Como por vezes o cálculo destas cintas é complicado, torna-se mais simples aumentar ligeiramente as dimensões da viga de modo a não ultrapassar aquele limite.

3—Escadas

Existem dois tipos de escadas de betão armado: as escadas em cremalheira (sem vigas ou pernas) e as escadas apoiadas sôbre vigas ou pernas.

A—Escadas em cremalheira

Êste tipo de escada calcula-se como uma lage de vão l (fig. 86) e de espessura util e_{th}. A largura da lage corresponde evidentemente à largura da escada. Os redentes de betão não intervêm na resistência.

Como é difícil determinar o grau de encastramento da lage na secção dos apoios, vamos admitir que o momento flector máximo a meio da lage é igual a $\frac{P' l}{8}$ (fig. 86), em que P' representa a componente normal do pêso próprio da lage e da sobrecarga admitida.

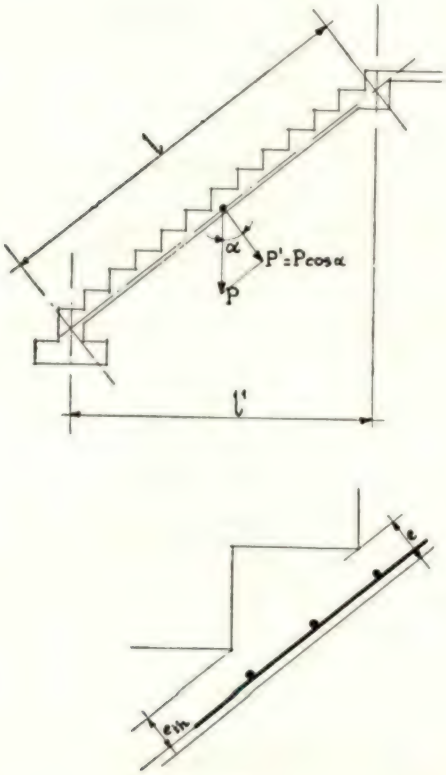


Fig. 86

Esta expressão pode ser escrita sob outra forma:

$$M_{max} = \frac{P' l}{8} = \frac{P \cos\alpha\, l}{8}$$

Mas

$$l = \frac{l'}{\cos\alpha}$$

donde:

$$M_{max} = \frac{P l'}{8}$$

A altura útil da lage e a secção das armaduras de flexão obtém-se empregando as expressões (16) e (17) relativas às vigas de secção rectangular:

$$e_{th} = A \frac{M}{a}$$

$$\omega = B \frac{M}{e_{th}}$$

A secção ω deverá ser distribuída por tôda a largura da lage de modo a que se não ultra-

[1] «Pratique du Calcul du Beton Armé», 1.ª parte, Capítulo X. (N. T.)

passe para a distância entre varões o preceituado no R. B. A. (1).

Com o fim de resistir aos momentos negativos que podem existir nos apoios devem-se colocar nas duas extremidades da lage alguns varões de encastramento, tendo como secção um terço ou metade da das armaduras de flexão e com um comprimento igual a um quinto do vão da escada ($^1/_5$).

Os degraus serão armados como indica a fig. 87. Estas armaduras não se calculam. Junto ao focinho de cada degrau deve ser colocado um varão de ø 8 mm, que será ligado à armadura da lage por meio de estribos de 5 a 8 mm de diâmetro, espaçados de 20 cm, aproximadamente. A armadura de distribuïção da lage deverá ser disposta de modo que a cada degrau correspondam sensivelmente dois varões.

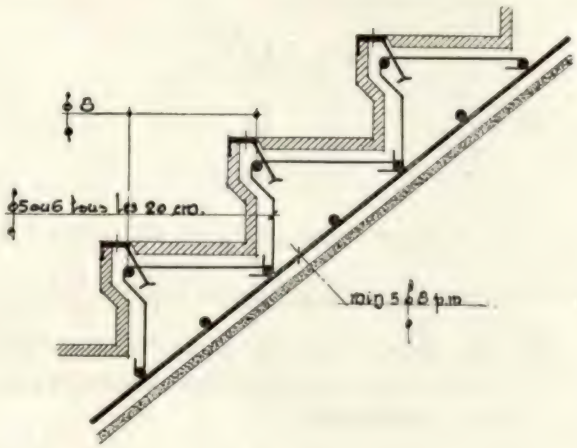


Fig. 87

B — Escadas apoiadas sôbre vigas ou pernas

Nestas escadas são as vigas ou pernas que constituem a estrutura principal. A lage terá a espessura mínima admissível (2).

Cálculo das Pernas

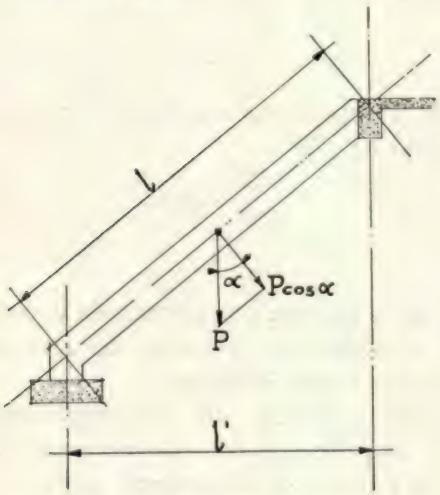


Fig. 88

Designemos por:

P — o peso total de escada incluindo as pernas e a sobrecarga sôbre os degraus.

a — a largura das pernas (10 a 20 cm)

l — o comprimento das pernas

l' — a projecção horizontal de l.

Como é difícil determinar o grau de encastramento das pernas, nas secções dos apoios, podemos adoptar o momento positivo a meio do vão igual a: $\frac{\frac{1}{2} P l'}{8}$ valor que corresponde ao caso dos apoios serem livres. O factor $\frac{1}{2}$ indica que cada perna da escada suporta metade da carga P. Como no entanto poderão existir nos apoios certos momentos negativos, devem-se prever armaduras na parte superior das pernas da escada, com uma secção igual, pelo menos, a metade da das armaduras de flexão. Estas armaduras deverão ser prolongadas de um extremo ao outro, a-fim-de assegurarem a fixação dos estribos.

As pernas podem ser dispostas como indicam as figs. 89 e 90.

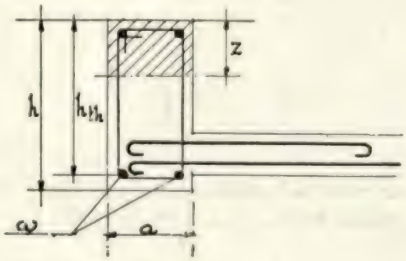


Fig. 89

No caso da fig. 89 podem ser consideradas como vigas de secção rectangular. A altura

(1) Art. 29.° do R. B. A. (N. T.)

(2) Esta espessura será a fixada pelo art. 26.° do R. B. A. e = 7 cm (N. T.)

útil e a secção das armaduras de flexão determinam-se pelas expressões (16 e 17):

$$h_{th} = A\sqrt{\frac{M}{a}}$$

$$= B\frac{M}{h_{th}}$$

em que a representa a largura da perna e M o momento flector máximo ou seja: $\frac{\frac{1}{2} P l'}{8}$.

No caso indicado na fig. 90 poderemos fazer intervir como elemento resistente à compressão uma parte da lage [1]:

$$a' = k + \frac{1}{2} a$$

em que k será o menor dos seguintes valores:

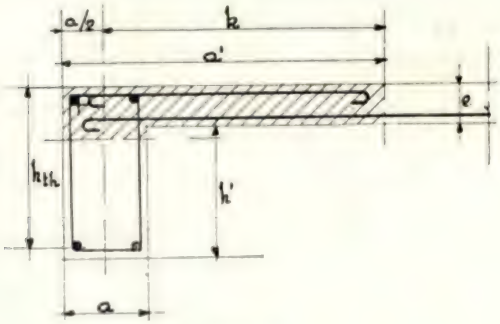


Fig. 90

6 vezes a espessura da lage

$\frac{1}{6}$ do vão das pernas

$\frac{1}{2}$ da largura da escada.

A altura h' (fig. 90) determina-se com o auxílio da expressão (28):

$$h' = 0{,}34\sqrt{\frac{M}{a}}$$

[1] Êste valor adoptado na Bélgica não corresponde ao preceituado no R. B. A. (Art. 34.º). (N. T.)

e a secção das armaduras de flexão pelo emprêgo da expressão (27):

$$\omega = \frac{M}{t\left(h_{th} - \frac{e}{2}\right)}$$

Torna-se em seguida necessário verificar a posição da fibra neutra e a tensão de compressão do betão como para as vigas em T.

Observação:

Podem-se simplificar os cálculos atrás indicados desprezando a parte comprimida da lage e aplicando as fórmulas que dizem respeito às secções rectangulares. Como é evidente, a altura que se obtém assim será um pouco maior.

Verificação da Resistência ao esfôrço transverso:

A tensão de trabalho do betão ao escorregamento longitudinal é dada pela expressão (36):

$$\tau = \frac{T}{a\,b}$$

em que T representa o esfôrço transverso máximo, isto é:

$$\frac{\frac{P}{2}\cos\alpha}{2}$$

sendo a a largura das pernas da escada e b como já dissemos, o braço de alavanca do binário das fôrças elásticas.

Quando a tensão de escorregamento fôr inferior a 4 kg/cm² não são necessários estribos. No entanto é conveniente prever alguns estribos de dois ramos, de 5 ou 6 mm de diâmetro, espaçados de 15 a 20 cm.

Quando a tensão fôr superior aquele limite, os estribos serão calculados da maneira habitual.

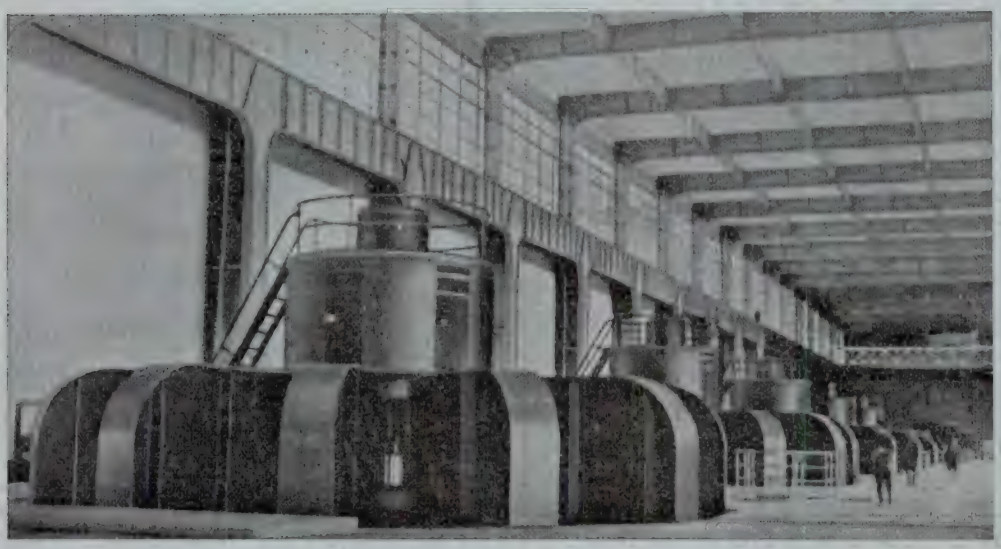
(Continua)

ERRATA

No artigo «Locomotivas Diesel», pág. 438, 2.ª coluna, linha 29, saiu, por lapso, *compressores* de corrente eléctrica, em vez de *geradores* de corrente eléctrica.

GENERAL ELECTRIC

Schenectady, N. Y.



Central hidroeléctrica com 5 geradores General Electric de 77.500 kVA 88 r. p. m. cada um

Motores e dínamos. Alternadores. Transformadores. Aparelhos para alta e baixa tensão. Centrais termo e hidroeléctricas. Instalações para melhorar o factor de potência. Tracção eléctrica. Máquinas, Transformadores e Electrodos para soldadura eléctrica. Fornos eléctricos. Automotoras eléctricas e Diesel-Eléctricas. Turbinas de vapor. Aparelhos de iluminação. Instrumentos de medida. Cabos e fios. Electrificação de fábricas. Comandos eléctricos especiais para fábricas têxteis, fábricas de papel, etc. Máquinas frigoríficas.

THOMSON
GENERAL ELECTRIC

Portuguesa, L.da

LISBOA
Rua do Norte, 5

Telef. 28135-28136

Granulados de mármores

para exportação e para o país

Mosaicos de granulados de mármore

OS MAIS BONITOS
OS MAIS RESISTENTES
OS MAIS VANTAJOSOS

Soc. Portuguesa CAVAN

Rua D. Estefania, 42

Telefone 47812 — Lisboa

FILIAL NO PÔRTO:

PRAÇA DA BATALHA, 90, 2.º

SOCIEDADE INDUSTRIAL METALURGICA

Responsabilidade Limitada

(REGISTADO)

SERRALHARIAS,
CALDEIRARIA,
FERRARIA,
FUNDIÇÕES

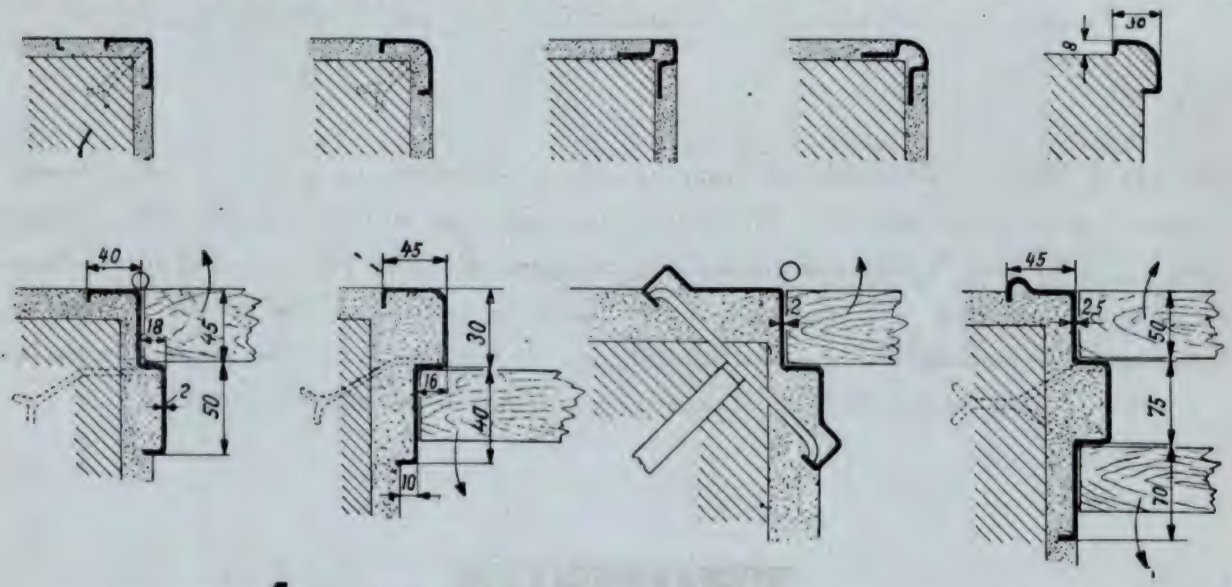
ESCRITÓRIO

Rua de S. Tiago, 13

LISBOA

Telefone 26572

ALGUNS EXEMPLOS DOS PERFIS QUE SE PODEM REALIZAR



LISBOA **FÁBRICA PORTUGAL**

FABRICAÇAO DE PERFIS DE CHAPA PARA TODOS OS GENEROS DE TRABALHOS DE CONSTRUÇÃO CIVIL

UMA REVOLUÇÃO NA CONSTRUÇÃO CIVIL

Sondages. Etanchements. Consolidations "Procédés Ródio"

Sondagens geológicas
Estudo da resistência e permeabilidade de terrenos; laboratório geofísico
Consolidação e impermeabilização de terrenos e alvenarias por meio de injecções de cimento, produtos químicos, emulsão betuminosa Shell-perm, etc.
Estacas de beton armado, sistema **Ródio** sem fazer trepidar o solo
Rebocos comprimidos por «cement gun»
Fundações em terrenos difíceis por congelação artificial, ou baixando o nível da água friática.

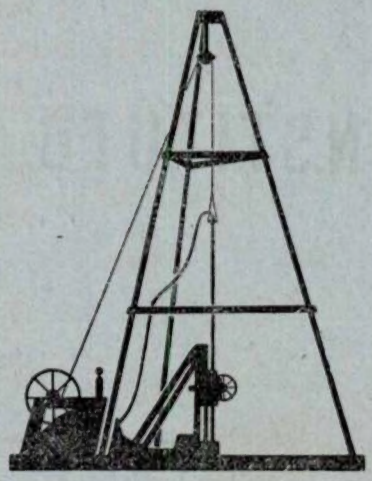
Engenheiro delegado para Portugal

Walter Weyermann

P. do Município, 32-2.º--LISBOA Tel. 2 8685

Sociedade Anónima com séde em PARIS

As melhores referências no paiz e no estrangeiro



Tabelas para o Cálculo do Betão Armado

Elaboradas em completo acôrdo com o Regulamento Português do Betão Armado

PELO ENGENHEIRO FERNANDO VASCO COSTA

A' venda na Redacção da "Técnica"

OFICINAS E LABORATÓRIOS

DO

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

As oficinas pedagógicas do Instituto Superior Técnico, de CARPINTARIA DE MOLDE, de INSTRUMENTOS DE PRECISÃO e de ELECTROTÉCNICA, fornecem todo o género de material escolar e de demonstração para o ensino técnico. Nos laboratórios de QUÍMICA ANALÍTICA, FÍSICA INDUSTRIAL E DE MINERALOGIA executam-se análises para o público

Para quaisquer informações, dirigir-se ao secretário da comissão executiva

EMPRÊSA DE SONDAGENS E FUNDAÇÕES, L.DA

COM

Eng. Ricardo E. Teixeira Duarte

(um quarto de século de especialização técnica)

Sondagens geológicas

—

Poços artezianos

—

Rebaixamentos do nível freático

—

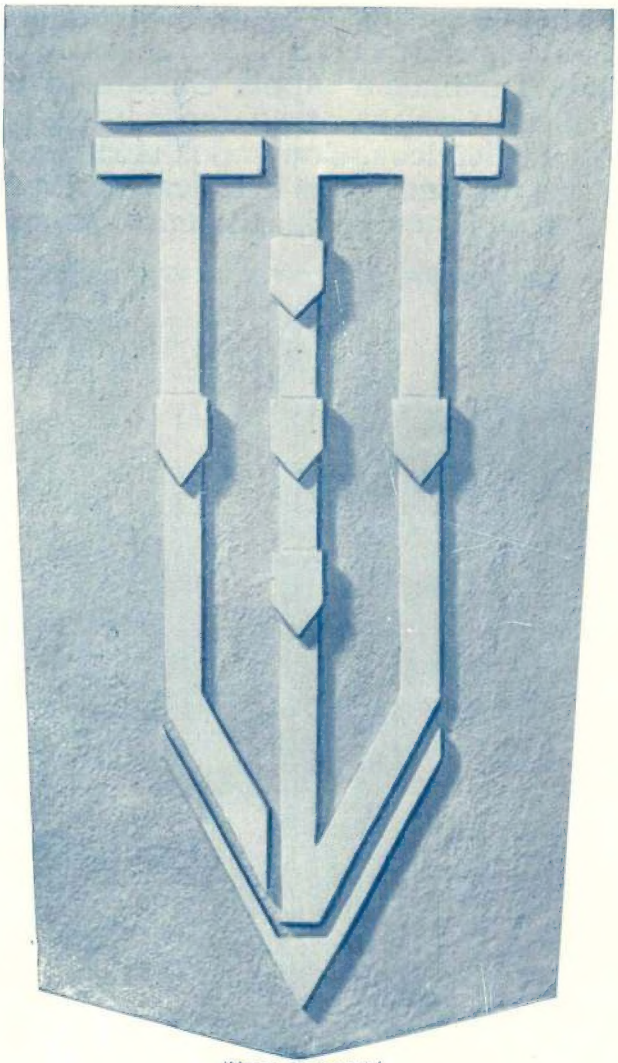
Consolidações do solo

—

Impermeabilização de rochas

—

Captações de água subterrânea



(Marca de garantia)

Fundações de todos os géneros

—

Alicerces económicos

—

Estacas de todos os tipos

—

Consolidação de más fundações

—

Obras hidráulicas

—

Obras subterrâneas

LISBOA — RUA AUGUSTA, 280, 3.° E 4.°

TELEFONE 2 3962

SOCIEDADE ANÓNIMA

BROWN, BOVERI & CIE.

BADEN (SUISSA)

Representante geral para Portugal e Colónias:

EDOUARD DALPHIN

Escritório Técnico: Rua de Passos Manuel, 191, 2.º // PORTO // Tel. 2411

Máquinas eléctricas, transformadores, mutadores, aparelhos para alta e baixa tensão. Montagem completa de centrais termo e hidro-eléctricas. Electrificação de fábricas e de caminho de ferro. Locomotivas, e auto-motoras eléctricas e Diessel-eléctricas. Máquinas de extracção. Turbinas a vapor. Geradores de vapor Velox. Máquinas frigoríficas. Grupos e transformadores para a soldadura pelo arco. Fornos eléctricos. Comandos eléctricos especiais para tôdas as máquinas utilizadas nas Fábricas de Fiação, Tecelagem, Acabamentos, Estamparia, Cimento, Moagem, etc.

Barragem do Ermal, da Companhia Electro-Hidráulica de Portugal, com 20 milhões de metros cúbicos de capacidade da albufeira. Na parte central, duas comportas automáticas, da casa construtora «Ateliers des Charmilles», de 9 × 5 metros, para a evacuação das cheias. Em baixo, a central automática de Guilhofrei (I) com uma turbina vertical tipo Kaplan (Ateliers des Charmilles) de 2750 cavalos e o canal de condução da água à central do Ermal (central II) com uma turbina vertical tipo Francis de 6250 cavalos (Ateliers des Charmilles) e duas horizontais (Escher-Wyss) de 500 e 1500 cavalos. Tôda a parte eléctrica (alternadores, transformadores, aparelhos de 2000 e 30000 Volts) da casa BROWN, BOVERI & Cie.